1º TRIMESTRE

3º ESO

1. Números racionales y reales

3º ESO
1er TRIMESTRE

1. Fracciones equivalentes y números racionales

- Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes**, es decir, representan el mismo valor, si se cumple que:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

- Para **obtener fracciones equivalentes** a otra fracción, se multiplican o dividen su numerador y su denominador por un mismo número.
- Todas las fracciones equivalentes entre sí determinan el mismo **número racional**. Para representarlo se usa la fracción irreducible.

1 *Dadas las fracciones $\frac{18}{12}$ y $\frac{45}{36}$.*

a) Estudia si son equivalentes.

b) Halla tres fracciones equivalentes a $\frac{18}{12}$.

c) Escribe la fracción irreducible que represente al número racional $\frac{45}{36}$.

a) Son equivalentes si $18 \cdot 36$ da el mismo resultado que $12 \cdot 45$.

$$\left.\begin{array}{l} 18 \cdot 36 = 648 \\ 12 \cdot 45 = 540 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{No son equivalentes.}}$$

b) Para hallar tres fracciones equivalentes partimos de la fracción dada y multiplicamos o dividimos el denominador y el numerador por un mismo número.

– La multiplicamos por dos: $\frac{18}{12} = \frac{18 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \boxed{\frac{36}{24}}$

– La dividimos entre dos: $\frac{18}{12} = \frac{18 : 2}{12 : 2} = \boxed{\frac{9}{6}}$

– La dividimos entre seis: $\frac{18}{12} = \frac{18 : 6}{12 : 6} = \boxed{\frac{3}{2}}$

c) Simplificamos la fracción dada: $\frac{45}{36} = \frac{45 : 9}{36 : 9} = \frac{5}{4}$. *Por tanto, la fracción pedida es* $\boxed{\frac{5}{4}}$.

2 Determina cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes a $\frac{8}{12}$, e identifica cuál de ellas es la fracción irreducible.

a) $\frac{4}{6}$

b) $\frac{16}{28}$

c) $\frac{24}{36}$

d) $\frac{32}{60}$

e) $\frac{2}{3}$

f) $\frac{24}{30}$

3 Escribe cuatro fracciones equivalentes, una de ellas irreducible, del número racional $\frac{150}{60}$.

2 Suma y resta fracciones

- La **suma o resta** de dos fracciones con **igual denominador** es otra fracción con el mismo denominador y con numerador la suma o resta de los numeradores:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

- Si las fracciones tienen **distinto denominador**, se reducen a común denominador y luego se suman o restan los numeradores.

4 *Calcula las siguientes operaciones.*

a) $\frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{12}{9}$ *b)* $\frac{7}{6} - \frac{9}{12} + \frac{3}{8}$

a) Todas las fracciones tienen el mismo denominador; por tanto, mantenemos el denominador, y sumamos o restamos los numeradores:

$$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{12}{9} = \frac{4+3-12}{9} = \frac{-5}{9} = \boxed{-\frac{5}{9}}$$

b) Como las fracciones tienen distinto denominador, calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores, m.c.m.(6, 12, 8) = 24, lo dividimos entre cada denominador y multiplicamos el resultado por cada numerador. Finalmente operamos los numeradores.

$$\frac{7}{6} - \frac{9}{12} + \frac{3}{8} = \frac{7 \cdot 4}{6 \cdot 4} - \frac{9 \cdot 2}{12 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{28}{24} - \frac{18}{24} + \frac{9}{24} = \frac{28-18+9}{24} = \boxed{\frac{19}{24}}$$

5 Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones con el mismo denominador y simplifica el resultado cuando sea posible.

a) $\frac{2}{5} + \frac{12}{5} - \frac{9}{5} =$

b) $\frac{15}{7} - \frac{9}{7} - \frac{3}{7} =$

c) $\frac{4}{18} - \frac{6}{18} + \frac{10}{18} =$

d) $\frac{3}{20} - \frac{28}{20} + \frac{23}{20} =$

6 Calcula reduciendo previamente a denominador común y simplifica el resultado cuando sea posible.

a) $\frac{8}{6} + \frac{15}{24} + \frac{16}{9} =$

b) $\frac{16}{15} + \frac{12}{5} - \frac{24}{30} =$

c) $\frac{3}{18} - \frac{5}{9} - \frac{1}{2} =$

3 Multiplica y divide fracciones

- El **producto de dos o más fracciones** es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores, y por denominador, el producto de los denominadores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- El **cociente de dos fracciones** se obtiene multiplicando la primera por la inversa de la segunda.

  La fracción **inversa** de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

- Tanto en las multiplicaciones como en las divisiones se debe tener en cuenta la **regla de signos**.

7 *Calcula las siguientes operaciones simplificando el resultado hasta obtener la fracción irreducible.*

a) $\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) \cdot \frac{4}{9}$

a) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{-3}{10}\right) \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot (-3) \cdot 4}{2 \cdot 10 \cdot 9} = -\frac{60}{180} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

Multiplicación de numeradores y denominadores

b) $\frac{-2}{15} : \frac{8}{5}$

b) $\frac{-2}{15} : \frac{8}{5} = \frac{-2}{15} \cdot \frac{5}{8} = -\frac{10}{120} = \boxed{-\frac{1}{12}}$

Fracción inversa

8 Halla el resultado en forma de fracción irreducible de las siguientes multiplicaciones.

a) $\frac{-9}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{-2}{6} =$

b) $15 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \frac{9}{10} =$

c) $\frac{-3}{8} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{30}{4} =$

9 Calcula las siguientes divisiones, simplificando el resultado.

a) $4 : \frac{2}{5} =$

b) $\frac{-12}{30} : \left(-\frac{7}{3}\right) =$

c) $\frac{10}{3} : (-4) =$

4 Operaciones combinadas: jerarquía

- Cuando aparecen varias operaciones es necesario seguir un **orden** para efectuarlas:
  1.º Multiplicaciones y divisiones, siguiendo el orden de izquierda a derecha.
  2.º Sumas y restas.
- Si aparecen **paréntesis**, se operan primero estos empezando primero con los internos.

10 Calcula el resultado de las siguientes operaciones y simplifícalo cuando sea posible.

Ejemplo $\frac{9}{4} : \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} : \frac{1}{3} - 1 = \frac{18}{20} - \frac{21}{10} : \frac{1}{3} - 1 = \frac{18}{20} - \frac{63}{10} - 1 = \frac{18}{20} - \frac{126}{20} - \frac{20}{20} =$

$= -\frac{128}{20} = -\frac{32}{5}$

a) $\frac{1}{8} + \frac{5}{4} : \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{4}{9} =$

b) $5 - 3 \cdot \frac{8}{10} : \frac{2}{3} + \frac{9}{12} =$

11 *Realiza la siguiente operación y simplifica el resultado si es posible.*

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)\right)$$

Primero realizamos las operaciones de los paréntesis más internos; luego, las de los más externos, y una vez eliminados todos los paréntesis, operaremos primero la división y luego la resta.

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{6}\right)\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(2 + \frac{1}{24}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(\frac{48}{24} + \frac{1}{24}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \frac{49}{24} = \frac{3}{2} - \frac{24}{98} =$$

$$= \frac{147}{98} - \frac{24}{98} = \boxed{\frac{123}{98}}$$

12 Opera y simplifica.

a) $\frac{5}{3} - \frac{2}{3} : \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2}\right) =$

b) $\frac{2}{6} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{5}{2} - \left(\frac{6}{4} + \frac{2}{9}\right)\right) =$

5 Problemas con fracciones

- Para resolver los problemas se deben seguir estos pasos:
  1.° **Leer** atentamente el enunciado.
  2.° **Identificar** lo que se pide en el problema.
  3.° Identificar los **datos** que se proporcionan.
  4.° **Relacionar** los datos, **obtener** la solución del problema e **interpretar** el resultado.

13 *La quinta parte del agua de una garrafa de 10 litros se ha utilizado para regar las plantas, y con las* $\frac{3}{4}$ *partes del agua restante se ha limpiado el suelo de la casa. ¿Cuánta agua queda aún en la garrafa?*

Para regar las plantas se han utilizado: $\frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{10}{5} = 2$ *litros de agua.*

Después quedan: $10 - 2 = 8$ *litros.*

Para limpiar el suelo se emplean: $\frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{24}{4} = 6$ *litros.*

Quedan: $8 - 6 =$ *2 litros de agua en la garrafa.*

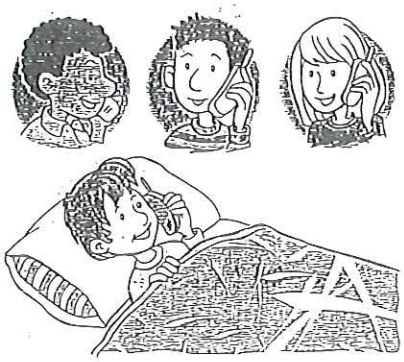
14 Los $\frac{2}{3}$ de los 108 alumnos de 3.° de Educación Secundaria de un centro escolar elegirán la opción A de Matemáticas en 4.° De ellos, la sexta parte elegirá Educación Plástica. ¿Cuántos alumnos de los que optarán por la opción A prefieren una asignatura distinta a Educación Plástica?

15 Entre las cinco y las nueve de la tarde, Ana reparte el tiempo de la siguiente forma:

- La cuarta parte la dedica a hacer las tareas de clase.
- Los cuatro quintos del tiempo restante, a la clase de inglés y a natación.
- El resto, a preparar todo lo que necesita para el día siguiente y a ver la televisión.

¿Cuánto tiempo emplea Ana en ver la televisión y en preparar las cosas del día siguiente?

16 Pablo está enfermo, y sus amigos le han llamado para saber cómo se encuentra. La llamada ha durado 15 minutos. Con Iván habló las $\frac{3}{5}$ partes del tiempo; con Sara, la tercera parte del tiempo restante, y los últimos minutos habló con Javier. ¿Cuánto tiempo estuvo hablando con cada uno de sus amigos?



17 Tres amigos quieren comprar a Patricia un regalo por su cumpleaños. El primero pagó la mitad de lo que cuesta, y el segundo, la quinta parte. ¿Qué fracción del regalo pagó el tercero? Si el regalo costó 20 euros, ¿cuánto dinero puso cada uno?

18 *Un cubo contiene 10 litros de agua, lo que representa los $\frac{5}{6}$ de su capacidad. ¿Cuánta agua cabe en el cubo cuando está lleno?*

Si x es el agua que cabe en el cubo cuando está lleno, $\frac{5}{6} \cdot x = 10$ *litros.*

Resolvemos la ecuación: $\frac{5}{6} \cdot x = 10 \Rightarrow x = 10 \cdot \frac{6}{5} = 12.$ *En el cubo caben 12 litros.*

19 Seis hectáreas y media de un bosque representan $\frac{2}{5}$ de la superficie total de este. ¿Cuál es la superficie total del bosque?

6 Fracciones y decimales

- Una **fracción** se puede expresar como un **número decimal** dividiendo el numerador entre el denominador.
- Se obtienen tres tipos de números decimales: exactos, periódicos puros y periódicos mixtos.
  - **Decimal exacto:** tiene un número limitado de cifras decimales.
  - **Decimal periódico puro:** su parte decimal está formada por un grupo de cifras que se repite indefinidamente (período).
  - **Decimal periódico mixto:** su parte decimal está formada por un grupo de cifras que no se repite y por otro que se repite indefinidamente.

20 *Indica el tipo de decimal que equivale a las fracciones,* $\frac{9}{4}$, $\frac{41}{30}$ *y* $\frac{6}{11}$.

Dividimos el numerador entre el denominador y obtenemos el decimal correspondiente.

$\frac{9}{4} = 2{,}25 \Rightarrow$ *Decimal exacto*

$\frac{6}{11} = 0{,}545454... \Rightarrow$ *Decimal periódico puro*

$\frac{41}{30} = 1{,}36666... \Rightarrow$ *Decimal periódico mixto*

21 Clasifica los siguientes decimales en exactos, periódicos puros y periódicos mixtos.

a) 2,14141414...

b) 24,6080808...

c) 18,25

d) 0,1677777...

e) 3,9999...

f) 100,3

22 Une con una flecha cada fracción con el decimal al que equivale.

a) $\frac{9}{5}$	I. 3,5
b) $\frac{5}{11}$	II. 1,8
c) $\frac{5}{3}$	III. $0{,}\widehat{45}$
d) $\frac{7}{2}$	IV. $1{,}\widehat{6}$

23 Determina a qué números decimales corresponden las siguientes fracciones e indica el tipo de decimales que son.

a) $\frac{13}{9} =$

b) $\frac{3}{20} =$

c) $\frac{7}{18} =$

d) $\frac{67}{18} =$

7 De decimal a fracción

Cualquier **número decimal** puede expresarse como una **fracción**, denominada **fracción generatriz**:

- **Exacto:** $\dfrac{\text{Número sin coma}}{\text{Unidad seguida de tantos 0 como cifras decimales}}$

- **Periódico puro:** $\dfrac{\text{Número decimal sin coma} - \text{parte entera}}{\text{Tantos 9 como cifras periódicas}}$

- **Periódico mixto:** $\dfrac{\text{Número decimal sin coma} - \text{parte entera y decimal que no se repite}}{\text{Tantos 9 como cifras periódicas y tantos 0 como cifras decimales no periódicas}}$

24 *Escribe en forma de fracción los números decimales 1,035, $12,\widehat{41}$ y $5,32\widehat{6}$.*

Decimal exacto: $1,035 = \dfrac{1035}{1000} = \boxed{\dfrac{207}{200}}$

Decimal periódico puro: $12,\widehat{41} = \dfrac{1241 - 12}{99} = \boxed{\dfrac{1229}{99}}$

Decimal periódico mixto: $5,32\widehat{6} = \dfrac{5326 - 532}{900} = \dfrac{4794}{900} = \boxed{\dfrac{799}{150}}$

25 Halla la fracción irreducible a la que equivalen los siguientes decimales.

Ejemplo. $12,0\widehat{35}$

Es un decimal periódico mixto. Por tanto, $12,0\widehat{35} = \dfrac{12035 - 120}{990} = \dfrac{11915}{990} = \dfrac{2383}{198}$

a) $1,4\widehat{02} =$

b) $8,305 =$

c) $0,9\widehat{3} =$

d) $6,\widehat{5} =$

26 Une cada fracción con el tipo de decimal que le corresponda. Fíjate, para ello, en la forma que tiene el denominador.

a) $\dfrac{83}{990}$	I. Decimal periódico puro
b) $\dfrac{147}{1000}$	
c) $\dfrac{9}{100}$ →	II. Decimal exacto
d) $\dfrac{73}{99}$	III. Decimal periódico mixto

8 Números irracionales

Números irracionales son aquellos que tienen una cantidad ilimitada de cifras decimales no periódicas. Ningún número irracional se puede expresar en forma de fracción.

27 *Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales.*

a) $\frac{4}{33}$ *c) 1,450707* *e) 8,010010001...* *g) 3,14151415...*

b) π *d)* $\pi - 1$ *f)* $\sqrt{2} + 3$

Racionales: $\frac{4}{33}$; *1,450707; 3,14151415...* *Irracionales:* π; $\pi - 1$; *8,010010001...*; $\sqrt{2} + 3$

28 ¿Cuáles de los siguientes números son irracionales?

a) 16,828282... c) $\sqrt{6} - 2$ e) $\frac{7}{25}$ g) 2,13

b) $\sqrt{4}$ d) 3,121122111222... f) $1 - \sqrt{9}$ h) $\sqrt{15}$

29 Algunos de los números usados en matemáticas tienen nombre de letra, como π. Otro de esos números es $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (su nombre es *fi*). Halla su valor decimal con la calculadora y explica si es o no un número irracional.

30 Explica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

Ejemplo. Un número con 100 cifras decimales no periódicas es irracional.
Falsa, porque es un decimal exacto y, por tanto, racional.

a) Todos los números expresados mediante raíces cuadradas son irracionales.

.....

.....

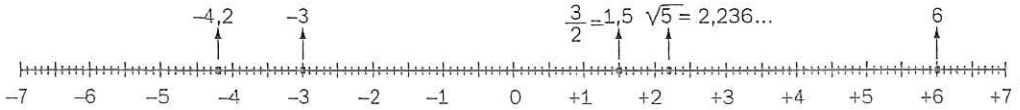
b) Hay números irracionales que se pueden escribir en forma fraccionaria.

.....

.....

9 Números reales: representación y ordenación

- Los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los **números reales**.
- Se **representan** en la recta numérica utilizando su valor decimal. A partir de ahora, puesto que en ella quedan representados todos los números reales, se habla de **recta real**.



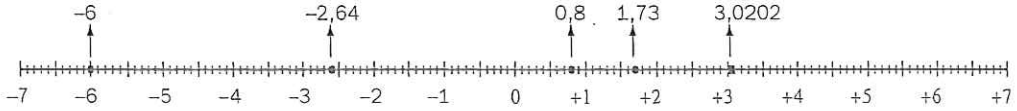
- Los números reales se **ordenan** a partir de su valor decimal comparando las cifras que ocupan las mismas posiciones.

31 *Representa y ordena de menor a mayor los números $\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, $\frac{4}{5}$, $3,\widehat{02}$ y -6.*

Con la calculadora obtenemos el valor decimal de los números irracionales y de la fracción:

$$\sqrt{3} = 1,73205... \ ; \ -\sqrt{7} = -2,64575... \ ; \ \frac{4}{5} = 0,8$$

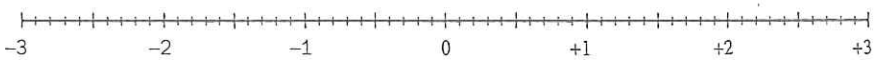
Situamos esos números decimales sobre la recta real:



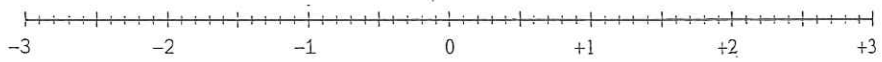
A partir de la representación, son menores los números que están a la izquierda. Por tanto:

$$\boxed{-6 < -\sqrt{7} < \frac{4}{5} < \sqrt{3} < 3,\widehat{02}}$$

32 Representa en la recta real los números reales -3, $\sqrt{5}$, $\frac{8}{9}$, $-\sqrt{2}$ y $\frac{7}{4}$.



33 Ordena de mayor a menor y representa en la recta real los números: $\sqrt{6}$, $-\frac{8}{3}$, $\sqrt{2}$ y 2,1.



10 Aproximaciones y errores

- Para manejar los números irracionales se utilizan las **aproximaciones**:
  - **Por defecto:** se eligen valores inferiores al número.
  - **Por exceso:** se eligen valores superiores al número.
- **Una técnica** para aproximar es el **redondeo**, que puede ser por exceso o por defecto, y se sigue el siguiente criterio:
  - Si el valor de la primera cifra que se omite es menor que 5, la cifra anterior no varía.
  - Si el valor de la primera cifra que se omite es mayor o igual que 5, la cifra anterior se aumenta en la unidad.
- Al aproximar un número se cometen **errores** que pueden ser de dos tipos:
  - **Error absoluto:** es la diferencia en valor absoluto entre el valor exacto del número y su valor aproximado: $E_a = |\text{valor exacto} - \text{valor aproximado}|$
  - **Error relativo:** es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto:

$$E_r = \frac{E_a}{\text{valor exacto}}$$

34 *Dado el número* $\frac{13}{6}$*:*

a) Escribe una aproximación por defecto y otra por exceso con dos decimales.

b) Halla el error relativo que se produce al elegir la aproximación por exceso.

a) $\frac{13}{6} = 2{,}166666... \Rightarrow$ *Aproximación por defecto:* $\boxed{2{,}16}$. *Aproximación por exceso:* $\boxed{2{,}17}$.

b) $E_r = \dfrac{E_a}{\text{valor exacto}} = \dfrac{\left|\frac{13}{6} - 2{,}17\right|}{\frac{13}{6}} = \dfrac{\left|\frac{13}{6} - \frac{217}{100}\right|}{\frac{13}{6}} = \dfrac{\left|\frac{650 - 651}{300}\right|}{\frac{13}{6}} = \dfrac{\frac{1}{300}}{\frac{13}{6}} = \dfrac{6}{3900} = \boxed{0{,}0015}$

35 Completa la siguiente tabla, aproximando los números con cuatro cifras decimales.

Número	Expresión decimal del número	Aproximación por exceso	Aproximación por defecto
$\frac{39}{7}$	5,571428571428...	5,5715	5,5714
$\sqrt{12}$			
$\frac{249}{2000}$			
$\sqrt{5} - 2$			
π			

36 Redondea a las milésimas los siguientes números.

Ejemplo $4 - \sqrt{3} = 2{,}26794...$

Como hay que redondear a la milésima, la primera cifra que se elimina es el 9, que es mayor que 5. Por tanto, a la última cifra (la milésima) se le añade 1. El redondeo es 2,268.

a) $\sqrt{26} =$

b) $\frac{39}{16} =$

c) $\frac{13}{9} =$

d) $\sqrt{32} =$

37 Redondea a las centésimas en cada uno de los casos siguientes. ¿Qué tipo de aproximación se realiza: por exceso o por defecto?

Ejemplo $7 - \sqrt{3} = 5{,}26794...$

El redondeo a la centésima es $5{,}27 > 7 - \sqrt{3} = 5{,}26794$. *Es una aproximación por* **exceso.**

a) $\sqrt{10} =$

b) $\frac{17}{6} =$

c) $\sqrt{15} - 1 =$

d) $\pi + 5{,}364 =$

38 Tres amigos se quieren repartir 200 gramos de pipas. ¿Cuántos gramos le corresponden a cada uno? Redondea el resultado a dos cifras decimales.

39 Un bono para el cine permite asistir a seis películas y cuesta 32 euros. Si un día normal la entrada cuesta 6,20 euros, ¿cuánto se ahorra en cada sesión comprando el bono?

40 Calcula el error absoluto que se comete al sustituir $\frac{1}{6}$ por 0,17.

41 Halla los errores absoluto y relativo que se cometen cuando $\frac{5}{9}$ se sustituye por 0,6.

42 Redondea $\frac{5}{12}$ a las décimas y a las centésimas. ¿En cuál de los dos casos es menor el error relativo?

43 Yandira ha aproximado el número 1,245 a 1,24, y Javier, a 1,25. ¿Qué error absoluto ha cometido cada uno? ¿Cuál ha realizado la mejor aproximación? Calcula para ello el error relativo y observa cuál es menor.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

1. Números racionales y reales

1 Simplifica hasta encontrar la fracción irreducible que represente a los siguientes números racionales.

a) $\frac{18}{42} =$

b) $\frac{30}{75} =$

2 Escribe el número decimal correspondiente a estas fracciones e indica de qué tipo es.

a) $\frac{32}{18} =$

b) $\frac{15}{36} =$

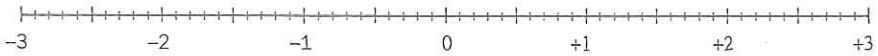
3 Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a) $\frac{5}{4} - \frac{1}{4} : \left(6 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right) =$

b) $\frac{7}{15} - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{9}{10}\right)\right) =$

4 Ordena de menor a mayor los siguientes números, representándolos previamente en la recta real.

$$-\frac{6}{5} \; ; \; \sqrt{8} \; ; \; -5 \; ; \; 3 \; ; \; \frac{1}{3} \; ; \; -\sqrt{17}$$



5 Redondea $\frac{13}{8}$ a la centésima y calcula los errores absoluto y relativo que se cometen con esa aproximación.

2. Potencias y raíces

1 Potencias de exponente entero

- Una potencia de **exponente natural** es el producto de un número por sí mismo tantas veces como indique el exponente:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \ (n \text{ veces})$$

Si la base es negativa:
a^{par} = positivo
a^{impar} = negativo

- Una potencia de **exponente entero negativo** es la inversa de esa misma potencia con exponente positivo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

44 Calcula el valor de las siguientes potencias de exponente natural.

Ejemplo $(-6)^3 = (-6)\cdot(-6)\cdot(-6) = -216$

a) $(-7)^2 =$

b) $(-5)^3 =$

c) $-6^2 =$

d) $-(-9)^2 =$

45 *Calcula las siguientes potencias.*

a) 3^{-4} *b)* $(-2)^{-5}$ *c)* $\left(\frac{7}{8}\right)^{-3}$ *d)* $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2}$

a) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \boxed{\frac{1}{81}}$

b) $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = \boxed{-\frac{1}{32}}$

c) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^3} = \frac{1}{\frac{343}{512}} = \frac{512}{343} = \boxed{\left(\frac{8}{7}\right)^3}$

d) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2} = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{36}{25}}$

46 Halla el valor de las siguientes potencias.

a) $4^{-3} =$

b) $(-3)^{-5} =$

c) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} =$

d) $\left(-\frac{8}{5}\right)^{-1} =$

2 Propiedades de las potencias

- Las **propiedades de las potencias** son:
  - Producto de potencias de igual base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
  - Cociente de potencias de igual base: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
  - Potencia de un producto: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
  - Potencia de un cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
  - Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- Como consecuencia de las propiedades de las potencias se concluye que:
  - Potencia de exponente cero: $a^0 = 1$
  - Potencia de exponente uno: $a^1 = a$

47 Aplica las propiedades necesarias para expresar como una única potencia las siguientes expresiones.

Ejemplo $\frac{7^{-5} \cdot 4^{-5}}{2^{-5}} = \frac{(7 \cdot 4)^{-5}}{2^{-5}} = \frac{28^{-5}}{2^{-5}} = \left(\frac{28}{2}\right)^{-5} = 14^{-5}$

a) $4^3 \cdot 5^3 =$

b) $\frac{12^{-2}}{6^{-2}} =$

c) $(7^2)^4 =$

48 Une con flechas los elementos de las columnas teniendo en cuenta las propiedades de las potencias que se aplican.

a) $\frac{12^5}{4^5}$	I. 28^3
b) $7^3 \cdot 4^3$	II. $\frac{20^{-4}}{4^{-4}}$
c) 5^{-4}	III. 3^5
d) $(7^2)^{-3} \cdot 7^6$	IV. 1

49 Reduce a una única potencia, teniendo en cuenta que las bases son iguales.

Ejemplo $(5^4)^2 \cdot (5^3)^{-4} = 5^8 \cdot 5^{-12} = 5^{-4}$

a) $\frac{2^9 \cdot 2^6}{2^2} =$

b) $\frac{4^{-5} \cdot 4^7}{4^{-2}} =$

c) $(-7^3)^{-4} \cdot (-7^2)^5 =$

50 *Expresa como una única potencia considerando las propiedades de las potencias.*

a) $\dfrac{(3^2)^5}{3^9 \cdot 3^4}$

a) $\dfrac{(3^2)^5}{3^9 \cdot 3^4} = \dfrac{3^{2\cdot 5}}{3^{4+9}} = \dfrac{3^{10}}{3^{13}} = 3^{10-13} = \boxed{3^{-3}}$

b) $\dfrac{(-4)^7 \cdot (-5)^7}{2^7}$

b) $\dfrac{(-4)^7 \cdot (-5)^7}{2^7} = \dfrac{(4 \cdot 5)^7}{2^7} = \left(\dfrac{20}{2}\right)^7 = \boxed{10^7}$

51 Calcula el resultado de cada una de las potencias, aplicando las propiedades correspondientes.

Ejemplo $\dfrac{30^{-4}}{6^{-4}} = \left(\dfrac{30}{6}\right)^{-4} = 5^{-4} = \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{625}$

a) $\dfrac{12^3}{4^3} =$

b) $(-4)^{-3} \cdot (-4^3)^2 =$

c) $\dfrac{9^{-4} \cdot 9^2}{9^{-3}} =$

d) $(2^3)^4 \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-3} =$

52 Sustituye las letras z por los números que correspondan en cada caso.

Ejemplo $7^z \cdot 7^{-2} = 7^8 \Rightarrow 7^{z-2} = 7^8 \Rightarrow z - 2 = 8 \Rightarrow z = 10$

a) $(-3)^z = 1$

b) $(5 : z)^2 = 5^2 \cdot 4^2$

c) $\dfrac{6^3}{6^z} = 6^4$

d) $\dfrac{9^4}{5^4} = \left(\dfrac{9}{5}\right)^z$

53 Comprueba si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades y explica por qué. En caso de ser falsas, escribe la igualdad correcta.

Ejemplo $4^5 \cdot 3^5 = 12^{10}$ *Es* ***falsa*** *porque, para multiplicar potencias con el mismo exponente, se multiplican las bases y se escribe el exponente. Lo correcto sería* $4^5 \cdot 3^5 = 12^5$.

a) $5^7 \cdot 5^7 \cdot 5^7 = (5^7)^3$

.....

.....

b) $\dfrac{8^{-1}}{8^{-3}} = 8^{-4}$

.....

.....

c) $6^5 \cdot 6^5 = 36^5$

.....

.....

54 Explica por qué son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) El producto de dos potencias se realiza escribiendo la base y sumando los exponentes.

.....

.....

b) Para dividir dos potencias con igual exponente, se dividen las bases y se escribe el mismo exponente.

.....

.....

c) Para elevar una potencia a otra potencia, se escribe la base y se suman los exponentes.

.....

.....

55 Expresa como potencias de base 2 las siguientes expresiones.

Ejemplo $\frac{512 \cdot 2^{-3}}{4^6}$ *Las bases distintas de 2 son 512 y 4, que se pueden descomponer como:*

$512 = 2^9$ *y* $4 = 2^2$. *Sustituyendo en la expresión anterior y aplicando propiedades*

se obtiene: $\frac{512 \cdot 2^{-3}}{4^6} = \frac{2^9 \cdot 2^{-3}}{(2^2)^6} = \frac{2^6}{2^{12}} = \boxed{2^{-6}}$

a) $8 \cdot 2^{-2} =$

b) $(2^3)^{-2} \cdot 16 =$

c) $\frac{32}{2 \cdot 2^3} =$

56 Escribe matemáticamente las siguientes frases.

Ejemplo El número cuyo cubo es -36. $\Rightarrow \sqrt[3]{-36}$

a) El número cuyo cuadrado es 30.

b) El número que elevado a 5 da 19.

c) El número cuyo cubo es -15.

3 Raíz de un número real

- La **raíz cuadrada** de un número es otro número que elevado al cuadrado da el primero:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

- De forma general, la **raíz enésima** de un número es el número que elevado a n da el primero:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- Los términos de la raíz son el **índice**, n, y el **radicando**, a.

57 Teniendo en cuenta que $7^2 = 49$ y que $(-7)^2 = 49$, ¿es correcto decir que $\sqrt{49}$ tiene dos valores, 7 y -7? Razónalo.

58 *Calcula las siguientes expresiones.*

a) $\sqrt[3]{216}$ *b)* $\sqrt[5]{243}$ *c)* $\sqrt[4]{-10\,000}$

a) $216 = 6^3$. *El número cuyo cubo es 256 es 6. Entonces,* $\boxed{\sqrt[3]{216} = 6}$.

b) $243 = (3)^5$. *El número que elevado a 5 da 243 es 3. Entonces,* $\boxed{\sqrt[5]{243} = 3}$.

c) $-10\,000$ *no se puede expresar como un número elevado a 4, puesto que cualquier número elevado a 4 da un resultado positivo. Se dice que* $\boxed{\sqrt[4]{-10\,000} \text{ no existe}}$.

59 Calcula las siguientes expresiones, dando todas las soluciones posibles.

Ejemplo Hay que buscar el número que elevado a 4 da 81. Hay dos: 3 y −3. Entonces, $\sqrt[4]{81} = 3$ *y* $\sqrt[4]{81} = -3$

a) $\sqrt{64} =$

b) $\sqrt[3]{-8} =$

c) $\sqrt[4]{16} =$

d) $\sqrt{100} =$

4 Propiedades de las raíces

Las **propiedades de las raíces** son:

- Raíz de una potencia (si el índice de la raíz y el exponente coinciden): $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- Producto de raíces de igual índice: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
- Cociente de raíces de igual índice: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.
- Potencia de una raíz: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.
- Raíz de una raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.

60 Calcula aplicando las propiedades de las raíces.

Ejemplo $\dfrac{\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\dfrac{21}{7}} = \sqrt[3]{3}$

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} =$

b) $\sqrt[8]{7^8} =$

c) $\dfrac{\sqrt[7]{10}}{\sqrt[7]{2}} =$

d) $\left(\sqrt[3]{6}\right)^2 =$

e) $\left(\sqrt{\sqrt[4]{6}}\right)^5 =$

f) $\sqrt[7]{3} \cdot \sqrt[7]{8} \cdot \sqrt[7]{2} =$

61 Encuentra el error cometido en la siguiente igualdad y razona la respuesta.

$\sqrt{\sqrt[5]{29}} = \sqrt[7]{29}$

62 ¿Es cierto que $\sqrt[3]{\sqrt[4]{35}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{35}}$? Explícalo.

63 Calcula el valor de la siguiente expresión, para ello ten en cuenta las propiedades de las raíces.

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 \cdot \sqrt[3]{2^2} =$

64 ¿A qué número hay que elevar $\sqrt[4]{2}$ para que dé 2? Comprueba tu respuesta.

65 Expresa como una única raíz las siguientes expresiones.

Ejemplo $\dfrac{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{8\cdot 12}}{\sqrt[3]{2\cdot 3}} = \dfrac{\sqrt[3]{96}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\dfrac{96}{6}} = \sqrt[3]{16}$

a) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{10} =$

b) $\dfrac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{45}} =$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}} =$

d) $\dfrac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt{18}} =$

66 Sustituye la letra z por el número que corresponda para que se cumplan las siguientes igualdades.

Ejemplo $\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[z]{\dfrac{5}{2}} \Rightarrow z = 4$

a) $\sqrt[6]{5^z} = 5$

b) $\left(\sqrt[5]{4}\right)^z = 4$

c) $\sqrt[8]{3}\cdot\sqrt[8]{z} = \sqrt[8]{30}$

d) $\sqrt{z\cdot 9} = \sqrt{z}\cdot\sqrt{9} = 18$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{z}}$

f) $\sqrt[z]{\sqrt{15}} = \sqrt[18]{15}$

67 *Descompón el radicando en factores y calcula las siguientes raíces.*

a) $\sqrt[3]{729}$ *b)* $\sqrt{36}$ *c)* $\sqrt[4]{\frac{10\,000}{16}}$

a) $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = \boxed{9}$ *b)* $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = \boxed{6}$ *c)* $\sqrt[4]{\frac{10\,000}{16}} = \sqrt[4]{\frac{10^4}{2^4}} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$

68 Calcula el valor de las siguientes raíces utilizando para ello la descomposición factorial del radicando y las propiedades de las raíces.

a) $\sqrt{9 \cdot 49} =$

b) $\sqrt[3]{125 \cdot 8} =$

c) $\sqrt{\frac{25}{16}} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{1\,000}{125}} =$

69 Comprueba si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades.

Ejemplo $\sqrt[3]{27 + 64} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64}$ *es* **falsa** *porque* $\sqrt[3]{27 + 64} = \sqrt[3]{91}$, *que no tiene un valor exacto, y* $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[3]{4^3} = 3 + 4 = 7$, *que sí lo tiene.*

a) $\sqrt{64 - 36} = \sqrt{64} - \sqrt{36}$

b) $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = 2$

5 Potencias de exponente fraccionario

Una potencia de **exponente fraccionario** equivale a una raíz de índice el denominador y de radicando la base elevada al numerador:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

70 Escribe en forma de potencia las siguientes raíces.

Ejemplo $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4 = \sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}}$

a) $\sqrt[5]{4^3} =$

b) $\sqrt{7} =$

c) $\sqrt[3]{6^2} =$

d) $\sqrt{5^3} =$

e) $\left(\sqrt[4]{6}\right)^3 =$

f) $\sqrt[5]{16} =$

g) $\sqrt[6]{82} =$

h) $\sqrt[5]{23} =$

71 Expresa como raíz las siguientes potencias.

Ejemplo $8^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{8^4}$

a) $3^{\frac{1}{2}} =$

b) $5^{\frac{3}{2}} =$

c) $8^{\frac{1}{3}} =$

d) $4^{\frac{2}{5}} =$

72 Calcula las siguientes raíces, expresándolas primero como potencias.

Ejemplo $\sqrt[5]{7^{10}} = 7^{\frac{10}{5}} = 7^2 = 49$

a) $\sqrt{3^8} =$

b) $\sqrt[6]{2^{12}} =$

c) $\sqrt[3]{4^9} =$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

2 Potencias y raíces

1 Expresa las siguientes potencias como fracciones.

a) $6^{-1} =$ b) $5^{-4} =$ c) $4^{-3} =$

2 Aplica las propiedades de las potencias necesarias para expresar como una única potencia.

a) $\dfrac{3^6 \cdot 3^{-2}}{3^{-3} \cdot 3} =$

b) $\dfrac{(2^3)^4}{2^{-1}} =$

c) $\dfrac{5^9 \cdot (5^2)^{-5}}{5^2 \cdot 5^{-4}} =$

3 Utiliza las propiedades de las raíces para expresar como una única raíz.

a) $\dfrac{\sqrt[8]{18} \cdot \sqrt[8]{4}}{\sqrt[8]{12}} =$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{8}} =$

c) $\sqrt{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{5} =$

4 Calcula las siguientes raíces expresándolas previamente en forma de potencia.

a) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 =$ b) $\sqrt[6]{5^{18}} =$ c) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{10} =$

5 Expresa en forma de raíz las siguientes potencias.

a) $6^{\frac{2}{3}} =$ b) $5^{\frac{1}{2}} =$ c) $10^{\frac{1}{4}} =$

3. Sucesiones

1 Sucesiones numéricas

- Una **sucesión** es un conjunto infinito de números ordenados que siguen alguna regla.
- Cada uno de estos números se llama **término** y se representa por a_n, donde n es el lugar que ocupa dicho número en la sucesión.
- La fórmula que permite hallar cualquier término de una sucesión se denomina **término general**.

73 Escribe los tres términos siguientes de las sucesiones.

Ejemplo $-1, 3, -5, 7, -9...$ *Los tres términos siguientes son:* $11, -13, 15$.

a) 2, 6, 18, 54, 162...

b) −7, −3, 1, 5, 9...

74 Escribe los 6 primeros términos de la sucesión cuyo primer término es 2 y todos los demás se obtienen sumando −5 al término anterior.

75 ¿Cuáles son los 8 primeros términos de la sucesión cuyo primer término es −1 y los demás se obtienen multiplicando el anterior por 4?

76 Escribe el término que falta en las siguientes sucesiones.

Ejemplo $\frac{1}{3}, \frac{-2}{7}, \frac{4}{11}, \frac{-8}{15}, __, \frac{-32}{23}, \frac{64}{27}, ...$ *En el numerador, cada término se obtiene multiplicando el anterior por* -2, *y en el numerador, sumando 4 al anterior. El término que falta es* $\frac{16}{19}$.

a) 7, 12, 17, ..., 27, 32...

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, ..., $\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, ...$

c) 1, 4, 9, 16, 25, ..., 49, 64...

77 *El término general de una sucesión es* $a_n = 4n^2 + 5n - 2$. *Calcula los términos primero, tercero y décimo.*

Como n *indica el lugar que ocupa cada término en la sucesión, para hallar el primero sustituimos* n *por 1; para el tercero, por 3, y para el décimo, por 10.*

– *Primer término:* $a_1 = 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = 4 + 5 - 2 = \boxed{7}$

– *Tercer término:* $a_3 = 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 2 = 36 + 15 - 2 = \boxed{49}$

– *Décimo término:* $a_{10} = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 2 = 400 + 50 - 2 = \boxed{448}$

78 Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones dadas por su término general.

Ejemplo $a_n = n^2 - 2n$. *Dando a* n *los valores desde 1 hasta 4 se obtiene:*

$a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ $a_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$ $a_3 = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$ $a_4 = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

a) $a_n = 5n - 3$

b) $a_n = \dfrac{1}{4n}$

c) $a_n = (-2)^n$

79 Calcula el término que ocupa el lugar 40 en cada una de las siguientes sucesiones.

Ejemplo $a_n = (10 + n)^2 \Rightarrow a_{40} = (10 + 40)^2 = 50^2 = 2\,500$

a) $a_n = 6n - 20$

b) $a_n = (-1)^n$

c) $a_n = \dfrac{1}{2n - 1}$

d) $a_n = (2n - 100)^2$

80 Dada la sucesión $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{16}, \frac{4}{32}, \frac{5}{64}, \ldots$, elige su término general de entre los siguientes.

a) $a_n = \dfrac{n + 1}{2n}$ b) $a_n = \dfrac{n + 1}{2^n}$ c) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ d) $a_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$

2 Progresiones aritméticas

- Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al término anterior una cantidad fija, llamada **diferencia** (d).
- El **término general** de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \qquad \text{donde } a_1 \text{ es el primer término de la sucesión.}$$

- La **suma de los n primeros términos** de una progresión aritmética viene dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

81 Indica si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. En caso afirmativo, escribe su diferencia.

Ejemplo $-7, -11, -15, -19, -23...$ *Sí, es una progresión aritmética porque se mantiene una diferencia constante entre sus términos:* $d = -4$.

a) 5, 10, 20, 40, 80...

b) 35, 25, 15, 5, −5...

82 Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.

Ejemplo $20, 13, 6, -1, -8$ $\quad a_1 = 20,\ d = 20 - 13 = -7 \Rightarrow a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-7) = 27 - 7n$

a) 2, 5, 8, 11, 14...

b) 48, 42, 36, 30, 24...

c) −9, −7, −5, −3, −1...

83 Halla el término general y los 4 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas a partir de los datos dados.

Ejemplo $a_1 = 2;\ d = 3$. *Sustituimos los datos en la fórmula general:*
$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 1 \Rightarrow a_1 = 2;\ a_2 = 5;\ a_3 = 8;\ a_4 = 11$

a) $a_1 = -11;\ d = 5$

b) $a_1 = 16;\ d = -4$

84 Escribe el valor del término indicado de las siguientes sucesiones aritméticas.

Ejemplo $a_1 = 5$, $d = 1$, a_{25} *Sustituimos los términos en la fórmula general:* $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_{25} = 5 + (25 - 1) \cdot 1 = 29$

a) $a_1 = 7$, $d = -3$, a_{40}

b) $a_1 = -8$, $d = 10$, a_{75}

c) $a_1 = -11$, $d = -2$, a_{30}

85 Escribe el término general de una progresión aritmética tal que $a_4 = 9$ y $a_5 = 15$.

86 *Halla la suma de los 50 primeros términos de la progresión aritmética donde* $a_1 = 4$ *y* $d = 5$.

El término general de la progresión aritmética es: $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 5$.

Sustituimos en la fórmula general:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{4 + [4 + 49 \cdot 5]}{2} \cdot 50 = \boxed{6\,325}$$

87 Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $a_1 = 5$, $d = 2$

b) $a_1 = 10$, $d = -3$

88 Halla la suma de los 50 primeros números pares.

3 Progresiones geométricas

- Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un número fijo, llamada **razón** (r). La razón de una progresión geométrica es el cociente entre dos términos consecutivos.
- El **término general** de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$ donde a_1 es el primer término de la progresión.

- La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica viene dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

89 Indica si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, indica su razón.

Ejemplo *1, −2, 4, −8, 16... Sí, es una progresión geométrica porque se cumple que:*

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \ldots = r = -2$$

a) 4, 12, 36, 72...

b) 2, −2, 2, −2, 2...

c) 3, 6, 9, 12, 15...

90 Calcula la razón r y escribe los tres términos siguientes de las progresiones geométricas.

Ejemplo *1, 3, 9, 27, 81...* $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = r = 3$. *El siguiente término será el resultado de multiplicar 81 por 3, y así sucesivamente. Los términos siguientes son: 243, 729 y 2 187.*

a) 5, −5, 5, −5, 5...

b) 4, −8, 16, −32, 64...

c) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots$

91 Halla el término general y los cuatro primeros términos de las progresiones geométricas a partir de a_1 y r.

Ejemplo $a_1 = 2,\ r = 3$: $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_1 = 2,\ a_2 = 6,\ a_3 = 18,\ a_4 = 54$

a) $a_1 = 6, r = 2$

b) $a_1 = -1, r = 5$

c) $a_1 = 7, r = -2$

92 *Halla el término general y la suma de los 10 primeros términos de la progresión donde* $a_1 = -8$ *y* $r = -2$.

El término general de la progresión es: $\boxed{a_n = -8 \cdot (-2)^{n-1}}$

La suma de los 10 primeros términos vendrá dada por la expresión general: $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$

Y sustituyendo los datos:

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot (-2) - a_1}{-2 - 1} = \frac{\left(-8 \cdot (-2)^{10-1}\right) \cdot (-2) - (-8)}{-3} = \frac{(-8) \cdot (-2)^9 \cdot (-2) - (-8)}{-3} =$$

$$= \frac{(-8) \cdot (-2)^9 - (-8)}{-3} = \boxed{-1\,368}$$

93 Calcula la suma de los 5 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3, r = 4$

b) $a_1 = 2, r = -3$

94 Si el cuarto término de una progresión geométrica es 405 y su razón 3, calcula su primer término y el término general.

4 Sucesiones recurrentes

- Una **sucesión recurrente** es aquella en la que cada término se obtiene a partir de los anteriores.
- Las progresiones aritméticas y geométricas son sucesiones recurrentes.

95 *De una sucesión se conocen* $a_1 = 3$, $a_2 = -1$ *y* $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$. *¿Es una sucesión recurrente? Calcula los 5 primeros términos.*

Observando la expresión del término general se deduce que cada término se obtiene a partir de los dos anteriores. Por tanto, es una sucesión recurrente.

Los dos primeros términos se conocen, y los otros tres se calculan a partir del término general:

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + a_1 = 2 \cdot (-1) + 3 = \boxed{1}$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 + a_2 = 2 \cdot 2 + (-1) = \boxed{3}$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 + a_3 = 2 \cdot 2 + 3 = \boxed{7}$$

96 En una sucesión, el primer término es 8, y los demás se calculan sumando 6 al término anterior. ¿Qué tipo de sucesión es? ¿Cuáles son sus 5 primeros términos?

97 Escribe los 5 primeros términos de una sucesión en la que el primer término es 2 y los demás se obtienen multiplicando por -5 el término anterior. ¿Qué tipo de sucesión es?

98 Halla los 10 primeros términos de la sucesión de Fibonacci: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

99 Calcula los 5 primeros términos de una sucesión en la que $a_1 = 2$, $a_2 = -3$ y $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

3 Sucesiones

1 Escribe los tres primeros términos de la sucesión $a_n = 2n^2 - 3n + 1$.

2 Clasifica las siguientes progresiones en aritméticas o geométricas, y escribe su término general.

a) 5, 10, 15, 20...

b) 5, 10, 20, 40...

3 Determina el término general que define los números naturales (1, 2, 3, 4...) y calcula la suma de los 100 primeros. ¿Es una sucesión aritmética?

4 Si el octavo término de una progresión aritmética es 15 y su diferencia es 3, calcula el primer término de la sucesión y el término general.

5 Escribe el término general de una progresión geométrica tal que $a_1 = 2$ y $a_2 = 6$. Determina los 5 primeros términos de esta progresión.

4. Polinomios

1 Expresiones algebraicas. Valor numérico

- Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras relacionados mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potencias. Las letras de una expresión algebraica se llaman **variables**.
- El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones que se indican.

100 *Escribe la expresión algebraica que indica la diferencia entre la edad de dos personas. Calcula después el valor numérico de esa diferencia cuando las edades son 45 y 29 años.*

Si a *es la edad de una persona, y* b, *la edad de la otra, la diferencia entre sus edades viene dada por la expresión* $\boxed{a - b}$.

Si a *es 45, y* b, *29, entonces, el valor numérico de* a − b *es:* $45 - 29 = \boxed{16}$.

101 Escribe la expresión algebraica que exprese el significado de las frases siguientes.

Ejemplo *"Si Jaime tiene* x *euros, insuficientes para comprar un CD de 25 euros, indica cuánto dinero le falta." Le faltan* $25 - x$ *euros.*

a) El precio de 7 bolígrafos si cada uno cuesta *c* euros.

b) El triple de una cantidad, *y*, reducida en 6 unidades.

c) El cuadrado de un número, *b*, más su mitad.

102 Escribe posibles frases que estén representadas por las siguientes expresiones algebraicas.

Ejemplo $x^2 - 2x$ *El cuadrado de un número, menos su doble.*

a) $a^3 + a^2 + a$

b) $b^2 - 3b - 4$

c) $x \cdot y + x^2 + y^2$

d) $x \cdot y \cdot z - 2x - 2y - 2z$

103 Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas para los valores de las variables indicados en cada caso.

Ejemplo $3a - a^2b + 5ab^2 - 2a^3 + b^3 + 1$ *para* $a = -1$ *y* $b = 2$

$3(-1) - (-1)^2 \cdot 2 + 5(-1) \cdot 2^2 - 2(-1)^3 + 2^3 + 1 = -3 - 2 - 20 + 2 + 8 + 1 = -14$

a) $5a + 3b - ab$ si $a = -3$ y $b = -4$

b) $\dfrac{3y^2z}{2a}$ si $a = 3$, $y = 2$ y $z = -5$

c) $2 - y^2 + 5x^2$ si $y = 3$ y $x = -2$

104 Calcula el valor numérico del polinomio $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ para los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$. ¿Cómo son los resultados obtenidos?

105 Laura tiene una colección de n sellos, y Javier, otra con la mitad de sellos que Laura. ¿Qué expresión permite calcular la cantidad de sellos que tienen entre los dos? ¿Cuántos sellos tienen si $n = 250$?

106 La expresión $2a + 3b + c$ tiene el valor numérico de 6 cuando $a = 1$ y $b = 1$. ¿Cuánto vale c en este caso?

107 Un acertijo dice lo siguiente: "Piensa un número, multiplícalo por tres, suma al resultado 5, resta el doble del número inicial al resultado, resta 4 a ese resultado y resta de nuevo el número inicial al resultado". ¿Por qué el resultado final es siempre 1?

2 Monomios. Suma y resta

- Un **monomio** es una expresión del tipo $a \cdot x^n$.
- **Monomios semejantes** son aquellos que tienen la misma parte literal.
- La **suma o resta** de dos monomios semejantes es otro monomio semejante a ellos cuyo coeficiente es la suma o resta de los coeficientes que se operan. Solo se pueden sumar y restar los monomios semejantes.

Coeficiente

Grado

$a \cdot x^n$

Parte literal

108 *Realiza las siguientes operaciones de monomios.*

a) $b^3 - 12b^3 + 8b^3 + 5b^3$ *b)* $2a^4 - 3a^4 + \frac{1}{2}a^4$

a) $b^3 - 12b^3 + 8b^3 + 5b^3 = (1 - 12 + 8 + 5)b^3 = \boxed{2b^3}$

b) $2a^4 - 3a^4 + \frac{1}{2}a^4 = \left(2 - 3 + \frac{1}{2}\right)a^4 = \left(\frac{4}{2} - \frac{6}{2} + \frac{1}{2}\right)a^4 = \boxed{-\frac{1}{2}a^4}$

109 Realiza la operación indicada en los casos que sea posible.

Ejemplo $3y^2 + 4y^3$: *no se puede porque los monomios no tienen la misma parte literal.*

a) $6z - \frac{3}{4}z =$

b) $\frac{1}{2}y^3 + 4x^3 =$

c) $6a^2 - 2a =$

d) $9b^6 + 5b^6 =$

110 Calcula el monomio que se obtiene en las siguientes sumas y restas.

Ejemplo $7c^5 - \frac{3}{4}c^5 + c^5 = \left(7 - \frac{3}{4} + 1\right)c^5 = \left(\frac{28 - 3 + 4}{4}\right)c^5 = \frac{29}{4}c^5$

a) $2a^8 - 9a^8 - 4a^8 =$

b) $\frac{2}{3}z^2 + 4z^2 =$

c) $x - \frac{3}{8}x =$

3 Multiplicación y división de monomios

- La **multiplicación** o **división** de monomios se realiza multiplicando o dividiendo por separado los coeficientes y la parte literal. No es necesario que los monomios que se multiplican o dividen sean semejantes.
- Conviene recordar las dos propiedades de las potencias que aparecen en estas operaciones:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

111 *Halla el resultado de las siguientes operaciones.*

a) $\frac{1}{6}y^3 \cdot (-2y^2) \cdot 3y^4$ b) $\frac{-20c^3}{4c}$

a) $\frac{1}{6}y^3 \cdot (-2y^2) \cdot 3y^4 = \frac{-2 \cdot 3}{6}y^{3+2+4} = -1y^9 = \boxed{-y^9}$

b) $\frac{-20c^3}{4c} = \frac{-20}{4}c^{3-1} = \boxed{-5c^2}$

112 Une mediante flechas los productos de monomios que dan el mismo resultado.

Ejemplo $x^2 - 2x$ *El cuadrado de un número menos su doble.*

a) $\left(\frac{1}{2}a^2\right) \cdot 6a^3$	I. $(-a^7) \cdot (-6a^2)$
b) $(-3a^4) \cdot (-2a^2)$	II. $\left(\frac{4}{3}a^4\right) \cdot \left(\frac{9}{2}a^3\right)$
c) $\left(\frac{3}{4}a^3\right) \cdot (8a^6)$	III. $(6a) \cdot a^5$
d) $(2a^5) \cdot (3a^2)$	IV. $(3a^4) \cdot a$

113 Realiza las siguientes divisiones de monomios.

Ejemplo $\frac{b^4}{7b^3} = \frac{1}{7}b^{4-3} = \frac{1}{7}b$

a) $\frac{40z^6}{8z^4} =$

b) $\frac{18y^9}{-6y^4} =$

c) $\frac{-36b^8}{3b} =$

d) $\frac{-2c^3}{-5c^2} =$

4 Polinomios: grado y orden

- Un **polinomio** es la expresión algebraica formada por varios monomios no semejantes:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

Cada uno de los monomios se llama **término**.

- Los números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son los **coeficientes**, y x, la variable. El término que no tiene variable es el **término independiente**.
- Cuando los términos de un polinomio se escriben en orden decreciente de sus grados se dice que el polinomio está **ordenado**. El **grado** de un polinomio es el mayor exponente al que está elevada la variable.

114 *Identifica el término independiente y el grado del siguiente polinomio y di si está ordenado.*

$$5x^3 - 3 - 2x^4 + 9x + x$$

El término independiente es −3, y el grado, 4.

El polinomio no está ordenado, porque los exponentes de los términos en x no están ordenados de forma decreciente.

115 Completa la tabla siguiente.

Polinomio	Grado	Coeficiente del término de mayor grado	Término independiente	Ordenado
$3x^2 + x - x^5 + 9$	5	−1	9	NO
$6x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 3x + 2$				
$7 + 4x - 3x^2 - x^3$				
$\frac{4}{3}x^6 - 2x^4 + \frac{2}{9}x^2$				

116 Escribe dos polinomios que cumplan las siguientes características.

Ejemplo Un polinomio de grado 5 que tenga el coeficiente del término de mayor grado igual a −2:

$$-2x^5 + 4x^3 - 9x + 6 + x^2$$

a) Un polinomio ordenado de grado 3 con el término independiente igual a 1.

b) Un polinomio de cuatro términos ordenado sin término independiente y de grado 5.

5 Suma y resta de polinomios

La **suma** o **resta** de polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando o restando los términos semejantes, es decir, los que tienen la misma parte literal.

117 *Dados los polinomios* $A(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}x + x^3 - \frac{5}{2}$ *y* $B(x) = 1 - x^4 + \frac{3}{8}x - 2x^3$, *calcula las expresiones* $A(x) + B(x)$ *y* $B(x) - A(x)$.

Primero expresamos los polinomios de forma ordenada, y luego procedemos a operar teniendo en cuenta los criterios establecidos.

a) $A(x) + B(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}x + x^3 - \frac{5}{2} + 1 - x^4 + \frac{3}{8}x - 2x^3 = -x^4 + (1-2)\cdot x^3 + 3x^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right)\cdot x +$

$+ \left(1 - \frac{5}{2}\right) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{8}\right)\cdot x + \left(\frac{2}{2} - \frac{5}{2}\right) = \boxed{-x^4 - x^3 + 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{3}{2}}$

b) $B(x) - A(x) = -x^4 - 2x^3 + \frac{3}{8}x + 1 - \left(x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}\right) = -x^4 + (-2 - 1)x^3 - 3x^2 +$

$+ \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)x + \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \boxed{-x^4 - 3x^3 - 3x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{7}{2}}$

118 Calcula la suma de los polinomios $A(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 6 - x$ y $B(x) = 4x^3 + 7x - 2x^2 + x^4 - 9$.

119 Halla $P(x) - Q(x)$, siendo $P(x) = 4x + 7x^2 - x^3 - 3$ y $Q(x) = 2 + 5x - 2x^3 - x^4$.

120 Realiza la siguiente operación.

Ejemplo $(2x^3 - 5x^2 - 3x) - \left(4x^3 - \frac{1}{2}x + 7\right) = 2x^3 - 5x^2 - 3x - 4x^3 + \frac{1}{2}x - 7 =$

$= (2-4)x^3 - 5x^2 + \left(-3 + \frac{1}{2}\right)x - 7 = -2x^3 - 5x^2 + \left(-\frac{6}{2} + \frac{1}{2}\right)x - 7 = -2x^3 - 5x^2 - \frac{5}{2}x - 7$

a) $(6x - 4x^3 + 2) + \left(3x - \frac{1}{2} + 2x^2 + 5x^3\right) =$

6 Multiplicación de polinomios

El **producto** de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando cada término de uno de ellos por todos los términos del otro.

121 *Calcula el producto de los polinomios* $P(x) = 3x - x^2$ *y* $Q(x) = 2x^4 - 6x + 5x^2 + 2$

$P(x) \cdot Q(x) = (3x - x^2) \cdot (2x^4 - 6x + 5x^2 + 2) = 3x \cdot (2x^4 - 6x + 5x^2 + 2) - x^2 \cdot (2x^4 - 6x + 5x^2 + 2) =$

$= 6x^5 - 18x^2 + 15x^3 + 6x - 2x^6 + 6x^3 - 5x^4 - 2x^2 = \boxed{-2x^6 + 6x^5 - 5x^4 + 21x^3 - 20x^2 + 6x}$

122 Dado el polinomio $A(x) = 3x - 2 + x^3 - 7x^4$, realiza los siguientes cálculos.

Ejemplo $(-8x^3) \cdot A(x) = -8x^3 \cdot (3x - 2 + x^3 - 7x^4) = -24x^4 + 16x^3 - 8x^6 + 56x^7$

a) $(-6) \cdot A(x) =$

b) $2x^2 \cdot A(x) =$

c) $(-5x^4) \cdot A(x) =$

123 Calcula el producto de los polinomios $P(x) = 6x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ y $Q(x) = 2x - 5$. ¿Qué grado tiene el polinomio resultante?

124 Halla los siguientes productos.

Ejemplo $(3x^2 - 4) \cdot (9x^3 + 5x - 6) = 3x^2 \cdot (9x^3 + 5x - 6) - 4 \cdot (9x^3 + 5x - 6) =$

$= 27x^5 + 15x^3 - 18x^2 - 36x^3 - 20x + 24 = 27x^5 - 21x^3 - 18x^2 - 20x + 24$

a) $(2x + x^2 - 5x^3) \cdot (6 - x) =$

b) $(7x^4 - 6x^2 + 3) \cdot (2x + x^3) =$

7 Potencia de un polinomio. Identidades notables

- Para calcular la **potencia de un polinomio**, se multiplica este por sí mismo tantas veces como indique el exponente: $[P(x)]^n = P(x) \cdot P(x) \cdot \ldots \cdot P(x)$ (n veces).
- Hay unos casos muy utilizados que se denominan identidades notables:
  - Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
  - Cuadrado de una resta: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
  - Suma por diferencia: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

125 *Calcula el cubo del polinomio* $x^2 - 3x$.

$(x^2 - 3x)^3 = [(x^2 - 3x) \cdot (x^2 - 3x)] \cdot (x^2 - 3x) = (x^4 - 3x^3 - 3x^3 + 9x^2) \cdot (x^2 - 3x) =$

$= (x^4 - 6x^3 + 9x^2) \cdot (x^2 - 3x) = x^6 - 3x^5 - 6x^5 + 18x^4 + 9x^4 - 27x^3 = \boxed{x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 27x^3}$

126 Expresa en forma de potencia los siguientes productos de polinomios.

Ejemplo $(6x^2 + 3x - 2) \cdot (6x^2 + 3x - 2) \cdot (6x^2 + 3x - 2) \cdot (6x^2 + 3x - 2) = (6x^2 + 3x - 2)^4$

a) $(2x + 5x^2) \cdot (2x + 5x^2) \cdot (2x + 5x^2) =$

b) $(4x^3 - 2x^2 + 1) \cdot (4x^3 - 2x^2 + 1) =$

c) $(3 - x + 5x^2 + 2x^3) \cdot (3 - x + 5x^2 + 2x^3) =$

127 Halla las siguientes potencias de polinomios.

Ejemplo $(2x + 3x^2 - 1)^2 = (2x + 3x^2 - 1) \cdot (2x + 3x^2 - 1) =$
$= 4x^2 + 6x^3 - 2x + 6x^3 + 9x^4 - 3x^2 - 2x - 3x^2 + 1 = 9x^4 + 12x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

a) $(3 + x + x^2)^2 =$

b) $(x + 2)^3 =$

c) $(2x^2 - 5x + 1)^2 =$

128 Asocia cada producto con el tipo de identidad notable que le corresponde.

a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$	
b) $(2x^3 + 3x) \cdot (2x^3 + 3x)$	I. $(a + b)^2$
c) $(5x - 4) \cdot (5x + 4)$	
d) $(x - 9) \cdot (x - 9)$	II. $(a - b)^2$
e) $(x^2 - x) \cdot (x^2 - x)$	III. $(a + b) \cdot (a - b)$
f) $(7x + 2) \cdot (7x + 2)$	

129 Aplica las identidades notables para calcular las siguientes expresiones.

Ejemplo $(3x - 4x^2)^2 = (3x)^2 + (4x^2)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4x^2 = 9x^2 + 16x^4 - 24x^3$

a) $(6x + 2)^2 =$

b) $(5 - 8x^2) \cdot (5 + 8x^2) =$

c) $(x - x^3)^2 =$

130 Completa el término que falta en las siguientes identidades.

Ejemplo $(5x^3 + 3x) \cdot (5x^3 - 3x) = 25x^6 - 9x^2$

a) $(4x - 1)^2 = 16x^2 + 1 -$ .....

b) $(5x^2 + 6)^2 = 25x^4 +$ ..... $+ 60x^2$

c) $(9 - 7x) \cdot (9 + 7x) =$ ..... $- 49x^2$

131 Sustituye los cuadrados por los signos + o − según corresponda.

Ejemplo $(8x + 3) \cdot (8x - 3) = 64x^2 \square 3 \Rightarrow (8x + 3) \cdot (8x - 3) = 64x^2 - 3$

a) $(x^2 + 4x)^2 = x^2 + 16x \square 8x^3$

b) $(5x - x^3) \cdot (5x + x^3) = 25x^2 \square x^6$

c) $(8x^4 - 2)^2 = 64x^8 \square 4 \square 32x^4$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

4. Polinomios

1 Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas en los valores que se indican

a) $3a^2 + 5ab - b^2$ para $a = -1$, $b = 2$

b) $2xy - x^2y^2 + 5$ para $x = 3$, $y = -2$

2 Realiza las siguientes operaciones con monomios.

a) $7c^3 - 3c^3 + 9c^3 =$

b) $(-8z^2) \cdot \left(\frac{6}{5}z^4\right) =$

c) $\frac{-16y^8}{2y^3} =$

3 Dados los polinomios $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 8x + 3$, $Q(x) = 5 + 2x^2 - x^3 + 2x^4$ y $R(x) = x^2 - 2$, calcula las siguientes expresiones.

a) $P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) + Q(x) =$

c) $Q(x) \cdot R(x) =$

4 Aplica las fórmulas de las identidades notables para obtener las expresiones siguientes.

a) $(4 + 3x) \cdot (4 - 3x) =$

b) $(2x - x^2)^2 =$

2º TRIMESTRE

3º ESO

5. Ecuaciones de primer y segundo grado

3º ESO

2º TRIMESTRE

1 Ecuaciones de primer grado. Resolución

- Una **ecuación de primer grado** con una incógnita es una igualdad del tipo $a \cdot x + b = c$ que solo es cierta para determinados valores de la incógnita. Estos valores son las soluciones de las ecuaciones.
- **Resolver** una ecuación es hallar su solución. Para ello:

  1.º Se quitan los paréntesis.

  2.º Se quitan los denominadores.

  3.º Se agrupan términos que tienen incógnita en un miembro y los independientes en el otro.

  4.º Se suman o restan los términos de cada miembro de la ecuación.

  5.º Se despeja la incógnita.

132 *Resuelve la ecuación* $2 \cdot (3 - x) - \frac{8x + 2}{3} = \frac{1 + x}{2} - (2x - 3)$

1.º Quitamos los paréntesis: $6 - 2x - \frac{8x + 2}{3} = \frac{1 + x}{2} - 2x + 3$

2.º Quitamos denominadores: $\frac{36}{6} - \frac{12x}{6} - \frac{16x + 4}{6} = \frac{3 + 3x}{6} - \frac{12x}{6} + \frac{18}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 - 12x - 16x - 4 = 3 + 3x - 12x + 18$

3.º Agrupamos los términos que llevan x: $-12x - 16x - 3x + 12x = 3 + 18 - 36 + 4$

4.º Sumamos los términos de cada miembro de la ecuación: $-19x = -11$

5.º Despejamos la incógnita: $x = \frac{-11}{-19} = \boxed{\frac{11}{19}}$

133 Estudia si los valores indicados son soluciones de las ecuaciones.

Ejemplo $2x + 5 = 3 - (6 + x)$ $\qquad x = 2$

Sustituimos el valor dado en la ecuación y comprobamos si se cumple la igualdad.

1.er miembro $2 \cdot 2 + 5 = 9$
2.º miembro $3 - (6 + 2) = -5$ } *Como los valores no son iguales, no es solución.*

a) $2(x + 1) - 3 = 4x + 9$ $\qquad x = -5$

b) $\frac{x + 4}{2} = 2 - x$ $\qquad x = 0$

134 Al resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se ha obtenido la igualdad $-3x = 4$. Solo falta despejar x. Indica cuáles de las siguientes opciones son correctas.

a) $x = \frac{4}{-3}$ b) $x = \frac{4}{3}$ c) $x = -\frac{4}{3}$

135 Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución obtenida.

Ejemplo $2 - x + 4x = 8x + 12$

$-x + 4x - 8x = 12 - 2$

$-5x = 10 = x \Rightarrow \frac{10}{-5} = -2$

Comprobamos si es solución sustituyendo el valor obtenido en la ecuación inicial.

1.er miembro $2 - (-2) + 4 \cdot (-2) = 2 + 2 - 8 = -4$
2.º miembro $8 \cdot (-2) + 12 = -16 + 12 = -4$
} *Como los dos miembros de la ecuación son iguales, la solución es correcta.*

a) $5x - 4 = 3x + 2$

b) $x - 9 - 6x + 4 = 0$

c) $4x - 10 + 3x = 5 + 9x - 7 - x$

d) $8 - x + 7 = 3x + 15$

136 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado en las que aparecen paréntesis.

Ejemplo $3 \cdot (1 - x) + 2x - 5 = 7x - (4x + 2) - 6$

$3 - 3x + 2x - 5 = 7x - 4x - 2 - 6$

$-3x + 2x - 7x + 4x = -2 - 6 - 3 + 5$

$-4x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

a) $10 + (5x - 6) - 4x = 2 - (3x - 1)$

b) $8 - 2(x + 4) + 9x = 5x + 3(1 - 2x)$

c) $1 - 5x + 4(2 - x) = 9 - (1 - 7x) - 2(x + 4)$

137 Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores.

Ejemplo $\frac{x + 5}{4} = \frac{2 - 3x}{6}$

$\frac{3(x + 5)}{12} = \frac{2(2 - 3x)}{12} \Rightarrow 3x + 15 = 4 - 6x$

$3x + 6x = 4 - 15 \Rightarrow 9x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{9}$

a) $\frac{4x - 1}{3} = \frac{2 - 6x}{5}$

b) $\frac{9 - 6x}{8} = \frac{3 + 2x}{4}$

138 Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

Ejemplo $\frac{2 - x}{6} - \frac{2x - 3}{2} = \frac{7}{12} - \frac{x - 1}{3}$

$$\frac{4 - 2x}{12} - \frac{12x - 18}{12} = \frac{7}{12} - \frac{4x - 4}{12} \Rightarrow 4 - 2x - 12x + 18 = 7 - 4x + 4$$

$$-2x - 12x + 4x = 7 + 4 - 4 - 18 \Rightarrow -10x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{-10} = \frac{11}{10}$$

a) $\frac{2x + 4}{3} + \frac{1 - x}{5} = \frac{x}{15}$

b) $\frac{1 - 2x}{9} + \frac{x}{3} - \frac{x - 4}{2} = 0$

c) $\frac{3(x - 2)}{10} - \frac{2x + 1}{5} = \frac{7}{2}$

d) $2(3 + 2x) - \frac{6x + 5}{4} = \frac{3x - 7}{2}$

2 Problemas de ecuaciones de primer grado

Algunos problemas requieren la resolución de ecuaciones de primer grado. En ellos se han de seguir los siguientes pasos:

1.° Leer atentamente el enunciado y elegir la incógnita.

2.° Plantear una ecuación.

3.° Resolver la ecuación e interpretar la solución del problema.

139 ***La mitad de las unidades de matemáticas de un libro de texto son de aritmética y álgebra. Los $\frac{2}{3}$ del resto se dedican a geometría, y las dos últimas unidades, a estadística y probabilidad. ¿Cuántas unidades tiene el libro?***

Unidades del libro: x, que es la incógnita.

Unidades de aritmética y álgebra: $\frac{x}{2}$

Unidades de geometría: quedan $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ *unidades* $\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{2} = \frac{2x}{6} = \frac{x}{3}$ *unidades de geometría*

Unidades de estadística y probabilidad: 2.

El total de unidades se obtiene sumando las unidades de cada tipo $\Rightarrow x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2$

Resolvemos la ecuación: $\frac{6x}{6} = \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} + \frac{12}{6} \Rightarrow 6x = 3x + 2x + 12$

$$6x - 3x - 2x = 12 \Rightarrow x = \boxed{12 \text{ unidades tiene el libro}}$$

Unidades de aritmética y álgebra: $\frac{x}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Unidades de geometría: quedan: $12 - 6 = 6$ *unidades* $\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

Unidades de estadística y probabilidad son las 2 que ya establecía el enunciado.

140 El precio de un pantalón es el doble que el de una camiseta. Si entre los dos cuestan 54 euros, ¿cuál es el precio de cada uno de ellos?

141 En un centro escolar, el número de alumnas de 3.° de Educación Secundaria excede en 20 al número de alumnos. Si entre todos hay 120 alumnos, ¿cuántas chicas y cuántos chicos hay en dicho curso?

142 La diferencia entre un número y los $\frac{3}{8}$ del mismo es 510. ¿De qué número se trata?

143 Se quiere enmarcar una fotografía de forma rectangular cuyo ancho es 7 centímetros menor que el largo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del marco si el perímetro de la foto es de 66 centímetros?

144 En su cumpleaños, Julia reunió una cantidad de dinero con la que se compró algunas cosas. La mitad la gastó en ropa; los $\frac{2}{5}$, en un libro y dos CD, y aún le quedan 14 euros. ¿Cuánto dinero recibió Julia en su cumpleaños?

145 Un programa de televisión dedica las $\frac{3}{4}$ partes del tiempo a reportajes y entrevistas. La tercera parte del tiempo restante es para publicidad, y los 30 minutos que quedan, para actuaciones musicales. ¿Cuánto tiempo dedica a publicidad?

3 Ecuaciones de segundo grado

- Una **ecuación de segundo grado** es aquella en la que la incógnita se encuentra elevada al cuadrado.
- Su forma general es: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b, c son números, llamados **coeficientes**.
- Las ecuaciones de segundo grado tienen dos, una o ninguna solución real.

146 Escribe en su forma general las ecuaciones e identifica el valor de los coeficientes a, b y c.

Ejemplo $x^2 + 3x = 12 - 5x$

$x^2 + 3x - 12 + 5x = 0$

$x^2 + 8x - 12 = 0 \Rightarrow a = 1;\ b = 8;\ c = -12$

a) $x^2 + 5x + 14 - 2x^2 = 10$

b) $x^2 + 6x + 6 = x + 6$

147 Indica si las siguientes ecuaciones son de segundo grado o no.

Ejemplo $x^3 + x^2 = x^3 - x^2$

Pasamos los términos en x al primer miembro y operamos: $x^3 + x^2 - x^3 + x^2 \Rightarrow 0 = 2x^2 = 0$

Por tanto, sí es una ***ecuación de segundo grado.***

a) $2x - 3x^2 = 5$

b) $7x + x^2 = 5 + x^2$

c) $8 - 2x = x^2$

148 ***Comprueba que*** $x = -5$ ***y*** $x = 3$ ***son soluciones de la ecuación*** $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Sustituimos los valores dados en la ecuación y comprobamos si se cumple la igualdad:

$x = -5 \Rightarrow (-5)^2 + 2 \cdot (-5) - 15 = 25 - 10 - 15 = 0 \Rightarrow$ *Es solución.*

$x = 3 \Rightarrow 3^2 + 2 \cdot 3 - 15 = 9 + 6 - 15 = 0 \Rightarrow$ *Es solución.*

149 Comprueba si son soluciones de cada una de las ecuaciones los valores dados.

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ $\quad x = 1$

b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ $\quad x = -1$

c) $x^2 - 3x + 3 = 0$ $\quad x = 2$

4 Ecuaciones incompletas de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado incompleta** es aquella que o no tiene término independiente ($c = 0$), o no tiene término en x($b = 0$), o ninguno de los dos.

150 *Determina cuáles de las siguientes ecuaciones de segundo grado son incompletas.*

a) $4x^2 + 2x = 0$ *b)* $5 + x + x^2 = 0$ *c)* $x^2 - 9 = 0$ *d)* $3x + x^2 - 5 = 0$

Es incompleta la ecuación del apartado a porque no tiene término independiente, y la del c porque no tiene término en x.

151 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas sin término en x.

Ejemplo $3x^2 - 63 = 300$

Despejamos x^2 *y resolvemos la ecuación, que tendrá dos valores correspondientes a la raíz, uno positivo y otro negativo:* $3x^2 = 363 \Rightarrow x^2 = \frac{363}{3} = 121 \Rightarrow x = \pm\sqrt{121} \Rightarrow x = \pm 11$

a) $x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 + 2x - 7 = 2x + 9$

c) $4x^2 - 100 = 44$

d) $2x^2 + 5 = x^2 + 9$

152 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas en las que no hay término independiente.

Ejemplo $3x^2 + 21x = 0$ *Sacamos factor común a la x. Para que se cumpla la igualdad* $x = 0$ *o el paréntesis igual a cero. Despejamos el valor de x del paréntesis para obtener la segunda solución de la ecuación.*

$$x \cdot (3x + 21) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{-21}{3} \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

a) $x^2 - 5x = 0$

b) $7x - x^2 = 0$

c) $5x^2 = 35x$

d) $3x^2 = 5x + x^2$

5 Ecuaciones completas de segundo grado

- Dada una ecuación de segundo grado en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$, sin ninguno de sus coeficientes igual a cero, entonces se dice que es una **ecuación de segundo grado completa**.
- Sus soluciones vienen dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

153 *Resuelve la ecuación de segundo grado* $x^2 + 3x = 2x + 42$.

Escribimos la ecuación en su forma general: $x^2 + 3x - 2x - 42 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 42 = 0$

Los coeficientes son: $a = 1$; $b = 1$; $c = -42$.

Aplicamos la fórmula para determinar las dos soluciones de la ecuación.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 168}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 + 13}{2} = \boxed{6} \\ x = \dfrac{-1 - 13}{2} = \boxed{-7} \end{cases}$$

154 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 7x + 10 = 0$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 + 8x + 7 = 0$

d) $2x^2 - 2x - 40 = 0$

155 Resuelve las siguientes ecuaciones.

Ejemplo $x^2 + 8 = 6x$

Expresamos la ecuación en su forma general pasando al primer miembro el término en x y aplicamos la fórmula para determinar las soluciones: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ x = \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

a) $x^2 + 2x = 3$

b) $x^2 - 9x = -18$

c) $3x^2 + 9x = 120$

156 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.

Ejemplo $x^2 + 10x = 4x - 5$

Operamos para expresar en forma general la ecuación y aplicamos la fórmula para determinar las soluciones: $x^2 + 10x - 4x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-6+4}{2} = -1 \\ x = \dfrac{-6-4}{2} = -5 \end{cases}$$

a) $x^2 + 5x - 4 = 10$

b) $2x^2 + 2x + 8 = 20x - 20$

6 Problemas con ecuaciones de segundo grado

Algunos problemas requieren la resolución de ecuaciones de segundo grado. En ellos se han de seguir los siguientes pasos:

1.° Leer atentamente el enunciado y elegir la incógnita.

2.° Plantear una ecuación.

3.° Resolver la ecuación e interpretar la solución del problema.

157 ***Halla dos números impares, positivos, consecutivos, cuyo producto sea 195.***

Un número impar lo representamos como $2x + 1$. El número impar consecutivo será dos unidades mayor que este, es decir: $2x + 3$.

Planteamos la ecuación y la resolvemos: $(2x + 1) \cdot (2x + 3) = 195$

$$4x^2 + 6x + 2x + 3 = 4x^2 + 8x + 3 = 195 \Rightarrow 4x^2 + 8x - 192 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-192)}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 3\,072}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{3\,136}}{8} = \frac{-8 \pm 56}{8} \begin{cases} x = \dfrac{-8 + 56}{8} = 6 \\ x = \dfrac{-8 - 56}{8} = -8 \end{cases}$$

Como los números tienen que ser positivos, rechazamos la solución negativa y nos queda que los núme buscados son:

$$2x + 1 = 2 \cdot 6 + 1 = \boxed{13}$$

$$2x + 3 = 2 \cdot 6 + 3 = \boxed{15}$$

158 Halla dos números consecutivos cuyo producto sea 306.

159 Calcula dos números consecutivos sabiendo que sus cuadrados suman 145.

160 Obtén dos números pares consecutivos cuya suma de cuadrados es 340.

161 Calcula dos números impares consecutivos sabiendo que el cuadrado de su suma es 256.

162 La suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos es 371. Averigua de qué números se trata.

163 Calcula un número tal que el doble de su cuadrado menos la mitad de su cuadrado es 1014.

164 Si a un número se le suma la mitad de su cuadrado, se obtiene 24. ¿De qué número se trata?

165 Calcula el lado de un cuadrado cuya área mide 121 centímetros cuadrados.

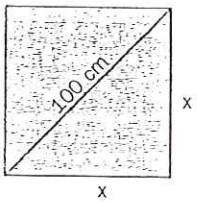
166 Calcula el radio de un círculo que tiene de área 36π centímetros cuadrados.

167 Un terreno rectangular ocupa 128 metros cuadrados. Calcula sus dimensiones sabiendo que un lado es el doble que el otro.

168 Calcula la base y la altura de un rectángulo sabiendo que su altura es 2 centímetros menor que su base y que su área es de 168 centímetros cuadrados.

169 El área de una parcela rectangular es de 37 500 metros cuadrados. Si la base de la parcela mide 100 metros más que la altura, ¿cuáles son sus dimensiones?

170 Calcula cuánto miden los lados de un cuadrado cuya diagonal mide 100 centímetros.



COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

5. Ecuaciones de primer y segundo grado

1 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $3(5 - 2x) - (8x + 7) = 6x + 4 - 2(x - 1)$

b) $\frac{2x - 3}{4} - \frac{x - 1}{2} = \frac{x}{8} - 2$

2 Tres amigos se han repartido una bolsa de cacahuetes de modo que el primero ha recibido el doble que el segundo, y este, la tercera parte de lo que le ha correspondido al tercero. Si la bolsa pesaba 1 200 gramos, ¿cuánto le ha tocado a cada uno?

3 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $3x^2 - 243 = 0$

b) $x^2 - 4x - 12 = 0$

c) $6x^2 + 3x = 0$

d) $2x^2 + 3x - 2 = 2x + 1$

4 El producto de dos números positivos consecutivos es 156. ¿Qué números son?

6. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1 Sistemas de ecuaciones

- Un **sistema de dos ecuaciones** de primer grado con dos incógnitas es un conjunto formado por dos ecuaciones con dos incógnitas que están elevadas a 1. Su expresión general es:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ siendo } a,\ b,\ c,\ a',\ b' \text{ y } c' \text{ números reales.}$$

  Los números a, b, a' y b' son los coeficientes del sistema, y los números c y c', los términos independientes.

- La **solución de un sistema** es una pareja de números tales que al sustituir x e y por ellos verifican las dos ecuaciones del sistema. Un sistema puede tener una solución, ninguna o infinitas soluciones.

171 *Escribe en la forma general el sistema y comprueba si* $x = 2$, $y = -1$ *es solución.*

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 11 \\ 2y = x - 5 \end{cases}$$

En la forma general, los términos independientes quedan en un miembro:

$$\begin{cases} 3x - y = 11 - 1 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 10 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$$

Sustituyendo $x = 2$ *e* $y = -1$ *se obtiene:*

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - (-1) \neq 10 \\ -2 + 2 \cdot (-1) \neq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 1 \neq 10 \\ -2 - 2 \neq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 \neq 10 \\ -4 \neq -5 \end{cases}$$

Las ecuaciones no se verifican. Por tanto, $\boxed{\text{no es solución}}$

172 Escribe la expresión general de cada uno de los sistemas siguientes.

Ejemplo $\begin{cases} 2(x-1)+3y-1=x \\ 5-(x+2)=y-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2+3y-1=x \\ 5-x-2=y-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y-x=1+2 \\ -x-y=-4-5+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=3 \\ -x-y=-7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4y + 5 = x + 4 \\ 3x + 2y = 2x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 1 + y - (2x - y) = 0 \\ 6x + 9y - 3 = 2 \end{cases}$

173 Indica si los valores de x e y son solución del sistema dado en cada caso.

Ejemplo $\begin{cases} 4x + 3y - 1 = x + y + 3 \\ 2(y - 1) = 5 - (x - 1) \end{cases}$ $\quad x = -2,\ y = 5$

$$\begin{cases} 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 - 1 = -2 + 5 + 3 \\ 2(5 - 1) = 5 - (-2 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 + 15 - 1 = 6 \\ 2 \cdot 4 = 5 - (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 \\ 8 = 8 \end{cases}$$

Es solución porque verifica las dos ecuaciones del sistema.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 - x - 5y \\ 5 + x = 2y + 10 \end{cases}$ $\quad x = -3,\ y = 1$

b) $\begin{cases} 4(y + 5) = 6 - (2 + x) \\ 2x - 3y = x + 3y - 4 \end{cases}$ $\quad x = -1,\ y = -2$

c) $\begin{cases} x + 2y - 2 = y + 3 \\ x - (y + 1) = 4x - 3y + 9 \end{cases}$ $\quad x = 0,\ y = 5$

174 Comprueba que $x = 2$, $y = 0$ y $x = 7$, $y = -1$ son soluciones del sistema $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 10y = 4 - 2x \end{cases}$

2 Resolución de sistemas por sustitución

El método de **sustitución** para resolver sistemas de ecuaciones consiste en **despejar** una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y **sustituir** su valor en la otra ecuación.

175 *Resuelve por sustitución el sistema* $\begin{cases} 4x + y - 5 = 3(x + 1) - 2y \\ y - (x + 2) = 4(y + 3) + x \end{cases}$

Escribimos primero el sistema en la forma general:

$$\begin{cases} 4x + y - 5 = 3x + 3 - 2y \\ y - x - 2 = 4y + 12 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 3x + 2y = 3 + 5 \\ y - x - 4y - x = 12 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 8 \\ -2x - 3y = 14 \end{cases}$$

Despejamos x *en una de las ecuaciones:* $x = 8 - 3y$

Sustituimos en la otra: $-2 \cdot (8 - 3y) - 3y = 14$

Resolvemos la ecuación obtenida: $-16 + 6y - 3y = 14 \Rightarrow 6y - 3y = 14 + 16 \Rightarrow 3y = 30 \Rightarrow y = 10$

Sustituimos el valor de y *en la* x *despejada:* $x = 8 - 3 \cdot 10 = 8 - 30 = -22$

$\boxed{\text{La solución es: } x = -22,\ y = 10}$

176 Halla por el método de sustitución la solución de los sistemas siguientes.

Ejemplo $\begin{cases} 5x + 2y = -9 \\ 3x + 4y = -11 \end{cases}$

$4y = -11 - 3x \Rightarrow y = \dfrac{-11 - 3x}{4}$ *Sustituimos* y

$5x + 2 \cdot \dfrac{-11 - 3x}{4} = -9$

$\dfrac{20x}{4} + \dfrac{-22 - 6x}{4} = \dfrac{-36}{4} \Rightarrow 20x - 22 - 6x = -36 \Rightarrow 14x = -14 \Rightarrow x = -1$

$y = \dfrac{-11 - 3 \cdot (-1)}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2 \Rightarrow$ *La solución es:* $x = -1,\ y = -2.$

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x - 5y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ x + 3y = -11 \end{cases}$

177 Resuelve por sustitución los siguientes sistemas.

Ejemplo $\begin{cases} 6x + 3y - 5 = 1 - 2x + y \\ 2y + 4 = x + 1 \end{cases}$

Pasando a la forma general: $\begin{cases} 6x + 2x + 3y - y = 1 + 5 \\ -x + 2y = 1 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 2y = 6 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$

$-x = -2y - 3 \Rightarrow x = 2y + 3$

$8 \cdot (2y + 3) + 2y = 6$

$16y + 24 + 2y = 6 \Rightarrow 16y + 2y = 6 - 24 \Rightarrow 18y = -18 \Rightarrow y = -1$

$x = 2 \cdot (-1) + 3 \Rightarrow x = 1$ *La solución es* $x = 1$, $y = -1$.

a) $\begin{cases} 6x + 3y = -2 + x + 2y \\ 4x - 2y + 7 = 2x + y - 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 1 = 2x \\ 3x - 5y + 2 = x + y - 4 \end{cases}$

178 Resuelve el siguiente sistema por sustitución: $\begin{cases} 2(y - 2) + 6x = 3y - 5 \\ x - (y - 3) = 3x - 2y \end{cases}$

3 Resolución de sistemas por reducción

- El método de **reducción** consiste en eliminar una incógnita al sumar las ecuaciones del sistema.
- A veces es necesario **multiplicar** una o las dos ecuaciones del sistema por números, con el fin de conseguir **coeficientes opuestos** de alguna incógnita en las ecuaciones y que se eliminen al sumar.

179 *Resuelve por reducción:* $\begin{cases} 2(x-3)-3y=9-3x \\ x-(2y+4)=4x-13 \end{cases}$

Escribimos en forma general: $\begin{cases} 2x-6-3y=9-3x \\ x-2y-4=4x-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y+3x=9+6 \\ x-2y-4x=-13+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-3y=15 \\ -3x-2y=-9 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 5 para que los coeficientes de x en las ecuaciones sean opuestos: $\begin{cases} 15x-9y=45 \\ -15x-10y=-45 \end{cases}$

Sumamos las ecuaciones y despejamos la incógnita que queda: $\begin{cases} 15x-9y=45 \\ -15x-10y=-45 \end{cases}$

$$-19y=0 \Rightarrow y=\frac{0}{-19}=0$$

Sustituimos el valor de y obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema y despejamos x:

$5x-3\cdot 0=15 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución es: } x=3,\ y=0.}$

180 Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas.

Ejemplo $\begin{cases} 4x+5y=6 \\ x-5y=-11 \end{cases}$

Como los coeficientes de la incógnita y ya son opuestos, sumamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x+5y=6 \\ x-5y=-11 \end{cases}$$

$$5x \qquad =-5 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow 4\cdot(-1)+5y=6 \Rightarrow 5y=6+4 \Rightarrow 5y=10 \Rightarrow y=2$$

La solución es: $x=-1,\ y=2.$

a) $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 5y-3x=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3=7y \\ -2x-y=-5 \end{cases}$

181 Calcula la solución de los siguientes sistemas utilizando el método de reducción.

Ejemplo $\begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ 2 - x - y = 2x + y \end{cases}$

Primero expresamos el sistema en forma general: $\begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ -x - y - 2x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ -3x - 2y = -2 \end{cases}$

Multiplicando la segunda ecuación por 2 y sumando: $\begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ -6x - 4y = -4 \end{cases}$

$$2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema: $8(-2) + 4y = 0 \Rightarrow 4y = +16 \Rightarrow y = +4.$

La solución es: $x = -2$, $y = +4$.

a) $\begin{cases} 6x + 9y - 2 = 3 + x \\ 2x + y = 4 - 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 1 = 4 + 5x + y \\ 4x + 3y - 2 = x + y - 3 \end{cases}$

182 Halla por reducción la solución de: $\begin{cases} 4(x - 2) - 3y = 6 \\ 6x - (2 - y) = -14 \end{cases}$

4 Problemas con sistemas de ecuaciones

En ocasiones es más cómodo utilizar **dos incógnitas** para plantear y resolver un problema. En estos casos hay que plantear dos ecuaciones y resolver el sistema que forman.

183 ***En un club deportivo, el número de chicas excede en 8 a la tercera parte del número de chicos. Si en total son 64 personas, ¿cuántos chicos y cuántas chicas hay en el club?***

Sean x el número de chicos e y el de chicas. Como el número de chicas excede en 8 a la tercera parte del de chicos, escribimos: $y = \frac{x}{3} + 8$. *Como en total son 64, escribimos:* $x + y = 64$.

A partir de estos datos planteamos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y = \frac{x}{3} + 8 \\ x + y = 64 \end{cases}$

A continuación, como tenemos la y despejada en la primera ecuación, resolvemos el sistema por sustitución:

$$x + \frac{x}{3} + 8 = 64 \Rightarrow \frac{3x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{24}{3} = \frac{192}{3} \Rightarrow 3x + x + 24 = 192 \Rightarrow 4x = 168 \Rightarrow x = 42$$

$y = \frac{42}{3} + 8 = 22$. *Por tanto,* $\boxed{\text{hay 42 chicos y 22 chicas.}}$

184 Eva y su hermano Juan tienen 78 cromos de la misma colección, pero Juan tiene el doble que Eva. ¿Cuántos cromos tiene cada uno?

185 En un pueblo hay problemas de abastecimiento de agua. El Ayuntamiento ha comprado 2 depósitos para almacenarla. La capacidad de uno de ellos excede en 20 000 litros la del otro, y entre los dos pueden almacenar 120 000 litros de agua. ¿Qué capacidad tiene cada uno de ellos?

186 Halla dos números tales que su diferencia es 18 y que el pequeño es 4 unidades menor que la mitad del mayor.

187 Con 20 euros puedo comprar 3 tebeos y una revista o 1 tebeo y dos revistas. Halla el precio de un tebeo y de una revista.

188 Ana tiene el triple de euros que Jorge, pero si compra un regalo de 18 euros y se gasta 12 más en material de dibujo, tendrá el mismo dinero que Jorge. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

189 En un centro escolar se va a hacer una excursión de fin de semana. Cada uno de los alumnos que van ha de pagar 20 euros, pero si fueran 10 alumnos más, pagarían 15 euros. ¿Cuántos alumnos van a la excursión? ¿Cuánto cuesta realizarla?

190 Si durante 3 semanas Ana no gasta nada de la paga semanal que le dan sus padres y añade a esa cantidad 5 euros de sus ahorros, se podrá comprar la colección de películas que le gusta. Pero por las buenas notas obtenidas, sus padres le han dado 40 euros, de modo que solo necesita añadir a esa cantidad el dinero de dos pagas semanales. ¿Cuánto cuesta la colección? ¿Cuál es la paga semanal de Ana?

191 La base de un triángulo es 3 centímetros menor que el doble de su altura, y la altura es 5 centímetros menor que la base. Halla el área del triángulo.

192 Al dividir un número entre otro da de resto 4 y de cociente 3. Si se sumaran 4 unidades al mayor, el cociente sería 4, y el resto, 0. ¿Qué números son?

193 Se quiere forrar el borde de una mesa rectangular. El largo de la mesa es igual al doble del ancho disminuido en su mitad, y si al ancho se le añadieran 40 centímetros, la forma de la mesa sería cuadrada. ¿Cuánta cinta se necesita para forrar el borde de la mesa?

194 La edad de Sara es el doble que la de su hermano Javier, y entre los dos suman 24 años. Su padre tiene 25 años más que Sara, y su madre, 5 veces la edad de Javier. Halla la edad de los padres de Sara.

195 El perímetro de un triángulo isósceles es de 32 decímetros. El lado desigual es 2 decímetros mayor que cualquiera de los lados iguales. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo?

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

6. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1 Estudia si $x = -5$, $y = 4$ es solución del sistema $\begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ x + y - 9 = 2x \end{cases}$

2 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por sustitución.

a) $\begin{cases} 5x + 4y = -2 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3 + 5y = 7x + y - 5 \\ 2x + 5y + 4 = x + 3y - 1 \end{cases}$

3 Halla por reducción la solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 3x + 6y = 21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 1 = 2x + 7 \\ 4x + 6 = y + 2 \end{cases}$

4 Halla dos números sabiendo que el mayor excede en 4 unidades al doble del menor y que se diferencian en 14 unidades.

3ª TRIMESTRE

3º ESO

7. Figuras planas

3º ESO

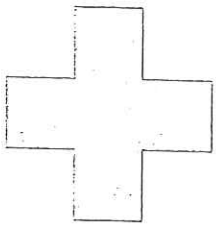
3er TRIMESTRE

1 Polígonos regulares

- **Polígono** es la superficie del plano delimitada por una línea poligonal cerrada.
- **Polígono regular** es aquel que tiene todos sus lados y sus ángulos interiores iguales.

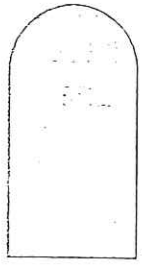
196 *¿Es esta figura un polígono regular?*

*Aunque tiene todos sus lados iguales, **no** es un polígono regular, ya que sus ángulos no son iguales.*

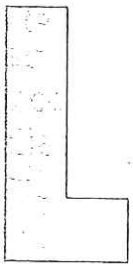


197 Indica qué figuras de estas son polígonos y cuáles no.

a)

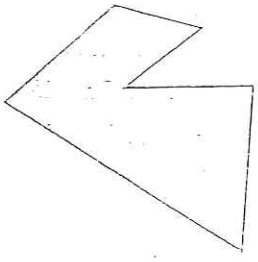


c)

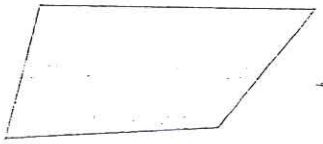


e)

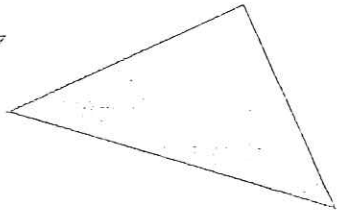
g)



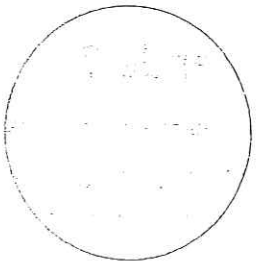
b)



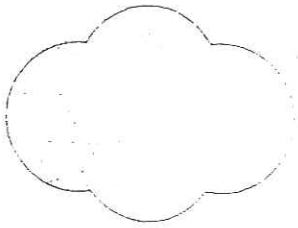
d)



f)



h)



198 Indica cuáles de estas figuras son polígonos regulares.

a)

b)

c)

d)

e)

2 Las propiedades de los triángulos

Las principales **propiedades de los triángulos** son:

- La longitud de cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos lados.
- La suma de los ángulos interiores es siempre 180°.

199 Indica si con los siguientes segmentos se puede formar un triángulo.

Ejemplo a = *24 cm*, b = *34 cm*, c = *44 cm*
Pueden formar triángulo, ya que 44 < 24 + 34, es decir, el lado mayor es menor que la suma de los otros dos lados.

a) a = 16 cm, b = 36 cm, c = 56 cm

b) a = 12 cm, b = 12 cm, c = 12 cm

c) a = 13 cm, b = 17 cm, c = 33 cm

200 Calcula el valor del ángulo que falta.

Ejemplo *18°, 24° y ...* *180 − (18 + 24) = 180 − 42 = 138°*

a) 55°, 65° y ...

b) 75°, 80° y ...

c) 105°, 70° y ...

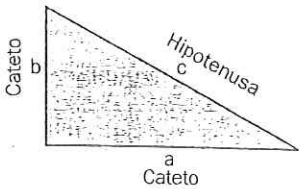
201 ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero?

202 El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide 42°. ¿Cuánto miden cada uno de los otros ángulos?

3 El teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

$$a^2 + b^2 = c^2$$



203 Calcula la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos.

Ejemplo *Cateto* a = *12 cm, cateto* b = *16 cm:* $c^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \Rightarrow c = \sqrt{400} = 20$ *cm*

a) Cateto a = 12 cm, cateto b = 35 cm

b) Cateto a = 20 dm, cateto b = 21 dm

c) Cateto a = 65 m, cateto b = 72 m

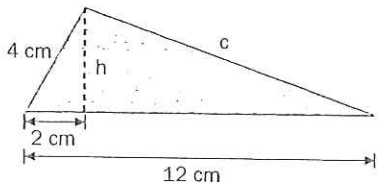
204 Calcula el cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos.

Ejemplo *Hipotenusa = 41 cm, cateto = 40 cm:* $c^2 = 41^2 - 40^2 = 481 - 400 = 81 \Rightarrow c = \sqrt{81} = 9$ *cm*

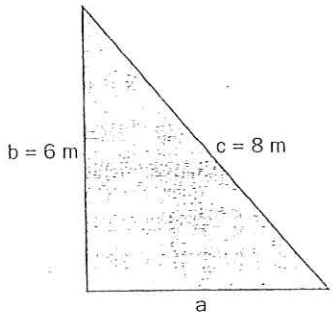
a) Hipotenusa = 13 cm, cateto = 12 cm

b) Hipotenusa = 73 m, cateto = 48 m

205 Calcula la altura (h) y el lado c del siguiente triángulo.



206 *Un empleado de teléfonos está arreglando una centralita colocada en la fachada de un edificio a 6 metros de altura. Tiene una escalera de 8 metros de longitud. ¿A qué distancia del pie del edificio debe apoyar la escalera?*



En este problema hay que calcular un cateto. Despejando un cateto en el teorema de Pitágoras, este se puede poner como:

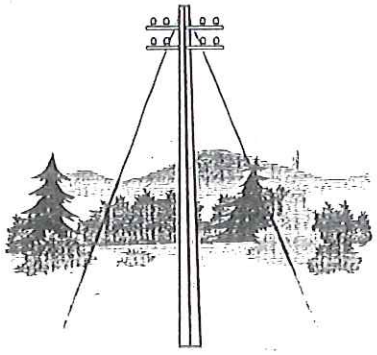
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow a = \sqrt{28} = \boxed{5{,}3\ m}$$

207 Una escalera de 6 metros de longitud se quiere usar para subir a un tejado de 5 metros de altura. ¿Cuál es la distancia máxima a la que se puede colocar el pie de la escalera de la pared para poder subir al tejado?

208 Se quiere construir una rampa para subir un desnivel de 4 metros. Si la rampa solo puede medir 10 metros, ¿a qué distancia del desnivel hay que empezar a construirla?

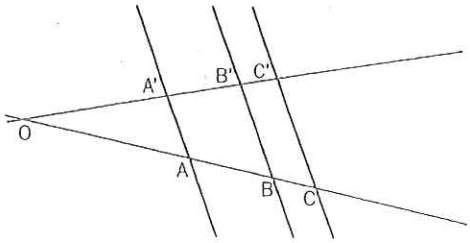
209 Un poste de la luz está sujeto desde su parte superior hasta el suelo por dos cables de acero, clavados, cada uno, a 3 metros del poste. Si dicho poste mide 8 metros, ¿qué cantidad de cable de acero ha hecho falta?



4 El teorema de Tales

Teorema de Tales: "Al cortar, por líneas paralelas, rectas concurrentes, los segmentos correspondientes son proporcionales".

Como consecuencia, la razón entre los lados homólogos de polígonos semejantes es un número constante.

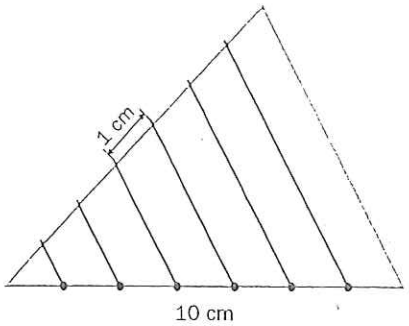


210 *Divide un segmento de 10 centímetros de longitud en 7 partes iguales.*

Dibujamos el segmento y trazamos otro, de una medida arbitraria (por ejemplo, 7 centímetros), con extremo en uno de sus extremos. Este segundo segmento lo dividimos en 7 partes iguales.

La última parte la unimos mediante una recta con el otro extremo del segmento y luego trazamos paralelas a dicha recta por los puntos en que hemos dividido el segmento.

Los puntos de corte de las rectas con el segmento original nos dan las divisiones del segmento.



211 Divide un segmento de 14 centímetros en 3 partes iguales.

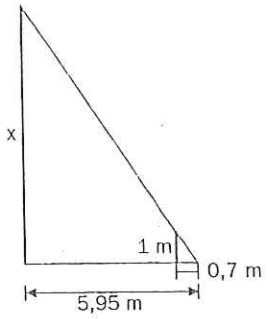
212 Dibuja un segmento de 10 centímetros y divídelo en dos partes de forma que una sea el doble de grande que la otra.

213 Los lados de un triángulo miden 18, 30 y 36 centímetros. Calcula cuánto miden los lados de un triángulo semejante a este cuyo lado menor mida 6 centímetros.

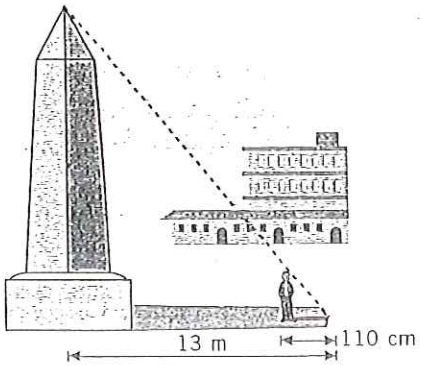
214 ***Sabiendo que un palo vertical de 1 metro de longitud proyecta una sombra de 70 centímetros, ¿qué altura tendrá un árbol cuya sombra mide 5,95 metros?***

Aplicando el teorema de Tales (se puede suponer que los rayos de luz del sol son paralelos) tenemos que:

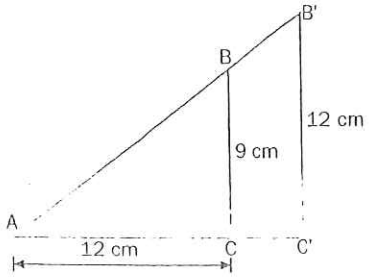
$$\frac{0,70}{5,95} = \frac{1}{x} \Rightarrow 0,7 \cdot x = 1 \cdot 5,95 \Rightarrow x = \frac{5,95}{0,7} = \boxed{8,5\ m}$$



215 Calcula cuánto mide un obelisco que proyecta una sombra de 13 metros cuando una persona de 1,75 metros proyecta una sombra de 110 centímetros.



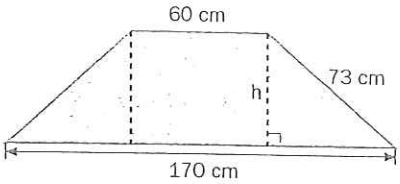
216 Utilizando el teorema de Tales y el de Pitágoras, calcula la medida de los lados que faltan.



5 Distancia en polígonos

Para calcular la distancia entre dos puntos de un polígono, muchas veces se utiliza el teorema de Pitágoras.

217 ***Calcula la altura del siguiente trapecio isósceles.***



Observando la figura se ven dos triángulos rectángulos en los que la altura es uno de los catetos y la hipotenusa es el lado oblicuo.

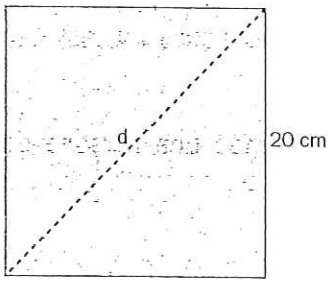
Por ser un trapecio isósceles, el otro cateto mide:

$$\frac{170 - 60}{2} = 55 \text{ cm}$$

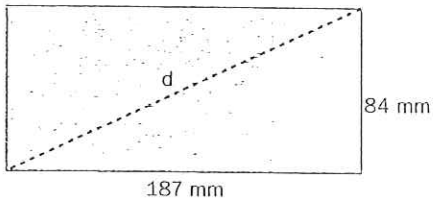
Aplicando el teorema de Pitágoras sobre uno de los triángulos obtenemos:

$$h^2 = 73^2 - 55^2 = 2304 \Rightarrow h = \sqrt{2304} = \boxed{48 \text{ cm}}$$

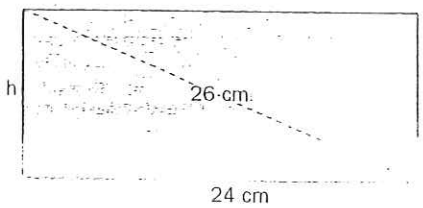
218 Calcula la diagonal de un cuadrado de 20 centímetros de lado.



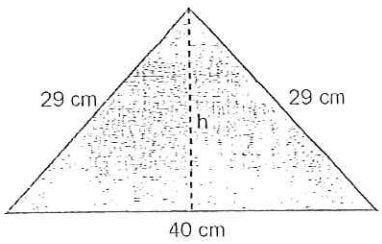
219 Calcula la diagonal de un rectángulo cuya base mide 187 milímetros, y su altura, 84.



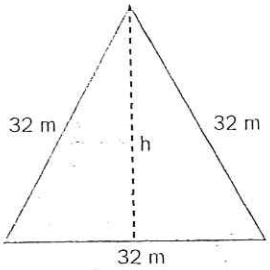
220 En un rectángulo, la base mide 24 centímetros, y las diagonales, 26 centímetros cada una. Calcula cuánto mide la altura.



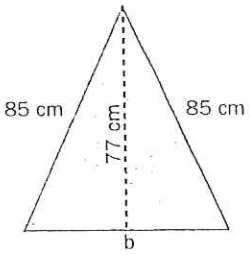
221 Calcula cuánto mide la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 29 centímetros, y su base, 40.



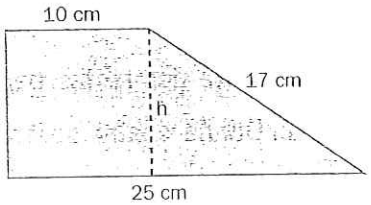
222 Calcula cuánto mide la altura de un triángulo equilátero de 32 metros de lado.



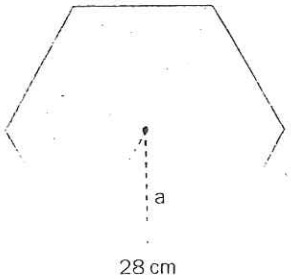
223 ¿Cuánto mide la base de un triángulo isósceles si su altura mide 77 centímetros, y sus lados iguales, 85?



224 En un trapecio rectángulo, las bases miden 10 y 25 centímetros, y el lado oblicuo, 17. Calcula cuánto mide el otro lado.



225 Calcula la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 28 centímetros (recuerda que el radio del hexágono mide lo mismo que sus lados).



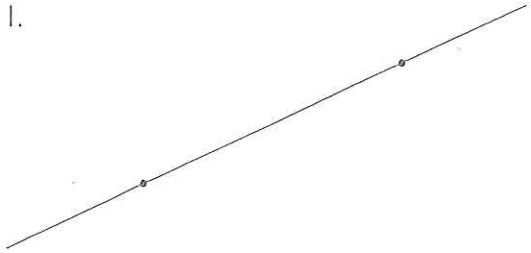
6 Puntos con las mismas propiedades: lugares geométricos

Un **lugar geométrico** es el conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad que solo pueden cumplir ellos (todos los puntos que cumplen esa condición pertenecen al lugar geométrico, y todos los puntos del lugar geométrico cumplen esa condición). Por ejemplo:

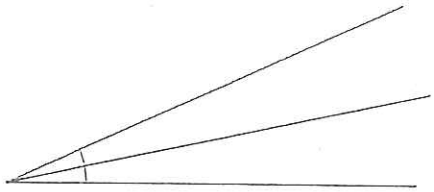
– La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo.

226 Identifica cada dibujo con su correspondiente definición.

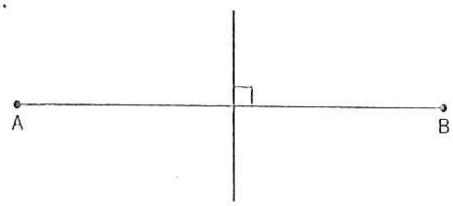
a) Lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos. I.



b) Lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos semirrectas con origen común. II.



c) Lugar geométrico de los puntos del plano alineados con dos puntos dados. III.



227 Identifica el lugar geométrico que resulta siguiendo estos pasos:

1. Traza dos rectas paralelas.
2. Dibuja cuatro puntos que estén a la misma distancia de ambas rectas.
3. Dibuja el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de las dos rectas y que pasan por los cuatro puntos anteriores.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

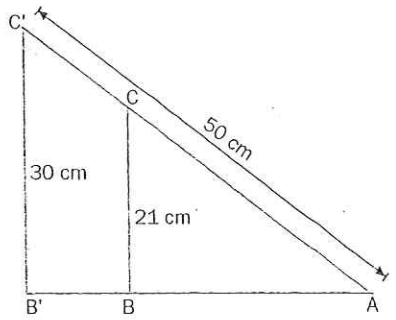
7. Figuras planas

1 ¿Cuál es el tamaño máximo de un segmento para que se pueda formar un triángulo con otros dos segmentos de 12 y 18 centímetros de longitud?

2 Rellena los datos que faltan en la siguiente tabla.

	Cateto (cm)	Cateto (cm)	Hipotenusa (cm)
Triángulo 1	85	132	
Triángulo 2	88		137

3 Utilizando el teorema de Tales y el de Pitágoras, calcula las medidas de los lados que faltan.



4 Calcula cuánto miden los lados iguales de un triángulo isósceles sabiendo que su altura mide 35 centímetros, y su base, 24.

5 Divide un segmento de 7 centímetros en tres partes de forma que una parte mida el doble que cada una de las otras dos.

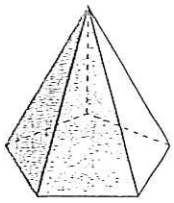
9. Cuerpos geométricos

1 Poliedros

- Los **poliedros** son cuerpos geométricos limitados por polígonos planos.
- Un poliedro es **regular** si todas sus caras son polígonos regulares iguales entre sí y en cada vértice concurre el mismo número de aristas o de caras. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro (4 caras), hexaedro o cubo (6 caras), octaedro (8 caras), dodecaedro (12 caras) e icosaedro (20 caras).
- En cualquier poliedro se cumple el **teorema de Euler**:

N.º de caras + N.º de vértices = N.º de aristas + 2

252 *Comprueba el teorema de Euler en el siguiente poliedro.*

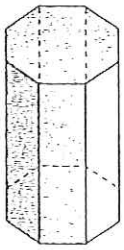


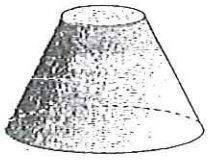
Este poliedro tiene: 6 caras, 6 vértices y 10 aristas. Por tanto:

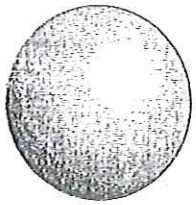
N.º de caras + N.º de vértices = 6 + 6 = $\boxed{12}$

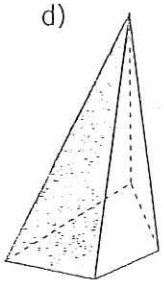
N.º de aristas + 2 = 10 + 2 = $\boxed{12}$

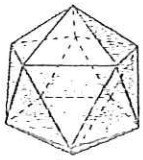
253 Indica cuáles de las siguientes figuras son poliedros.

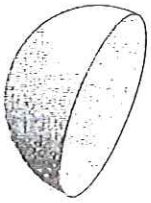
a) 

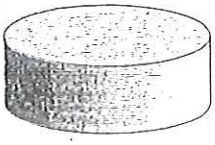
b) 

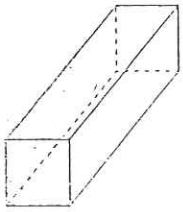
c) 

d) 

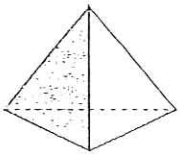
e) 

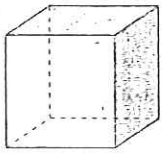
f) 

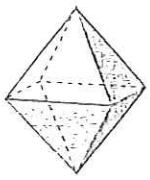
g) 

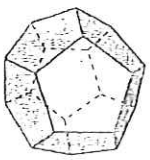
h) 

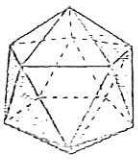
254 Escribe el nombre debajo de cada uno de estos poliedros regulares.

a) 

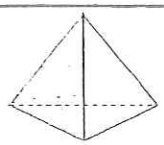
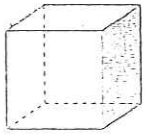
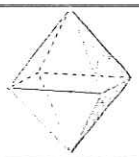
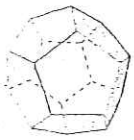
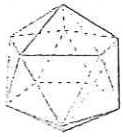
b) 

c) 

d) 

e) 

255 Completa la siguiente tabla y comprueba el teorema de Euler en los poliedros regulares.

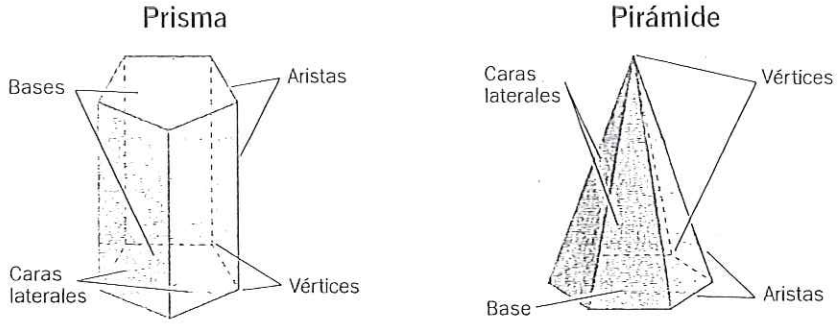
	N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas	Teorema de Euler
				
	*6*	*8*	*12*	*6 + 8 = 12 + 2*
				
				
				

256 Cada fila de la siguiente tabla corresponde a un poliedro. Completa la tabla aplicando el teorema de Euler.

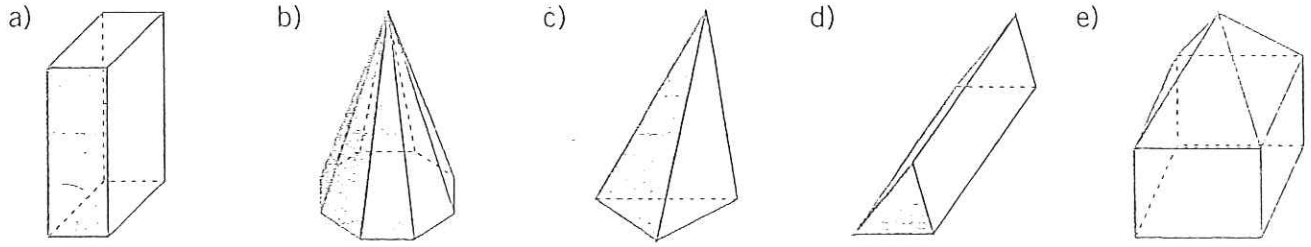
Poliedro	N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas
A	*5*	*6*	*9*
B	6	6	
C	10		24
D		7	12
E	12		30
F		4	6

2 Prismas y pirámides

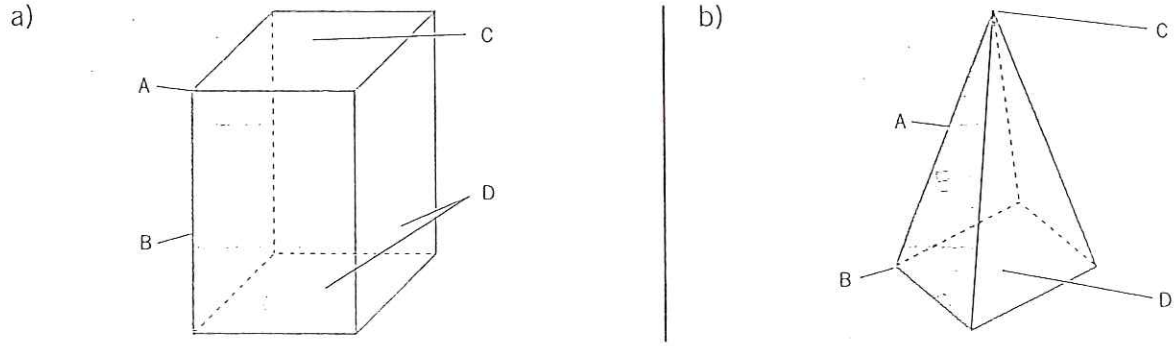
- Los **prismas** son poliedros que tienen dos caras iguales y paralelas (**bases**), y las restantes, formadas por paralelogramos (**caras laterales**).
- Las **pirámides** son poliedros que tienen una cara, llamada **base**, y las restantes, formadas por triángulos (**caras laterales**) que concurren en un **vértice**.



257 Marca con una cruz azul los prismas y con una cruz roja las pirámides.



258 Nombra los elementos señalados de estos cuerpos geométricos.



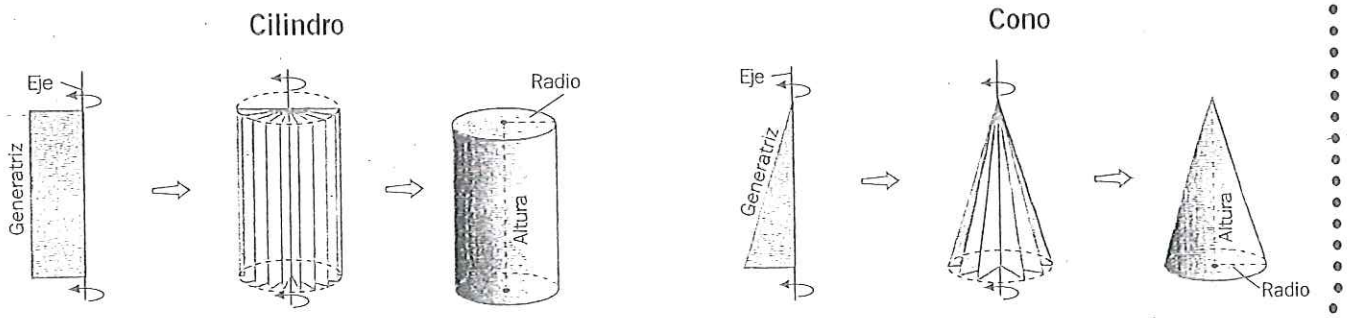
259 Dibuja los siguientes poliedros.

a) Un prisma que tenga 10 vértices.

b) Una pirámide que tenga 6 aristas.

3 Cilindro y cono

Los **cuerpos de revolución** son los cuerpos geométricos que se obtienen al girar una figura alrededor de un eje. Dos de ellos son el **cilindro** y el **cono**.



260 Dibuja los siguientes cuerpos de revolución.

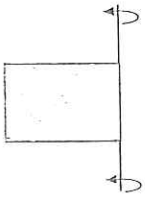
a) Cilindro de 2 centímetros de radio y 4,5 de altura.

b) Cono de 1,5 centímetros de radio y 4 de altura.

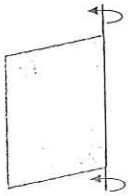
261 Indica cuál de estas figuras genera un cilindro y cuál un cono al girar alrededor del eje dibujado.

a)

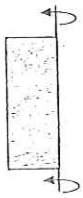
b)



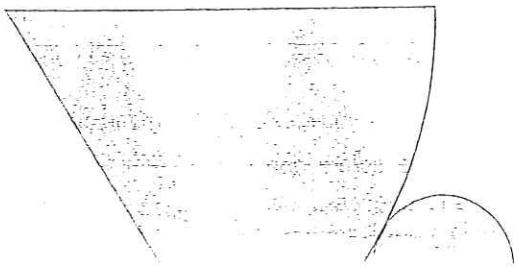
c)



d)

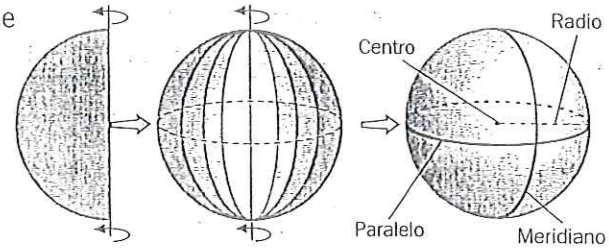


262 Si pudieras cortar un cono por una línea recta desde el vértice hasta la base y extenderlo, quedaría una figura como la de abajo, llamada desarrollo plano del cono. Dibuja a su derecha el desarrollo plano de un cilindro.



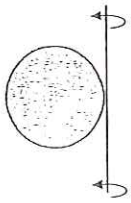
4 La esfera

- La **esfera** es el cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar un semicírculo alrededor de su diámetro.
- La superficie de la esfera se denomina **superficie esférica**.
- Al cortar una esfera con diferentes planos se obtienen las siguientes formas geométricas:



Semiesfera | Huso esférico | Casquete esférico | Zona esférica

263 Indica cuál de estas figuras genera una esfera al girar alrededor del eje dibujado.

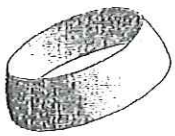
a) 

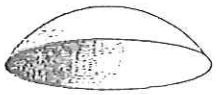
b)

c)

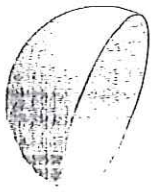
d)

264 Relaciona cada dibujo con la definición de la forma geométrica que representa.

a) 

b) 

c)

d) 

I. Parte de la superficie esférica limitada por dos meridianos.

II. Parte de la superficie esférica entre dos planos paralelos.

III. Corte de la superficie esférica por un plano.

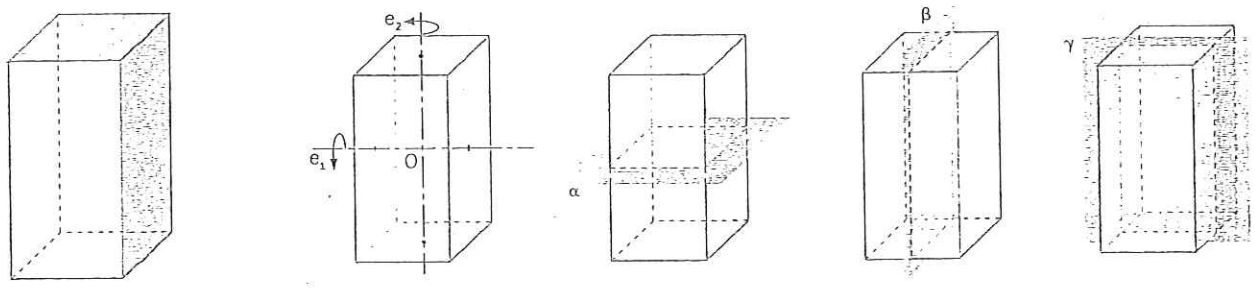
IV. Corte de la esfera con un plano que pasa por su centro.

5 Elementos de simetría en cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos pueden tener distintos **elementos de simetría**:

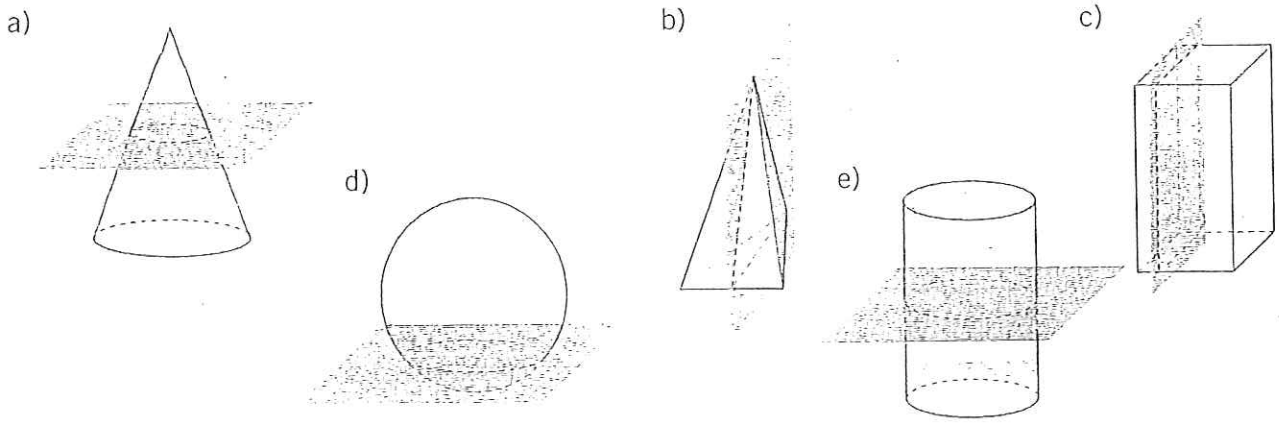
- **Centro de simetría**. Es el punto que divide en dos partes iguales a cualquier línea que pase por él.
- **Eje de simetría**. Es una línea que, si se gira el cuerpo alrededor de ella, el cuerpo queda igual.
- **Plano de simetría**. Es un plano que divide el cuerpo en dos partes iguales.

265 *Dibuja el centro de simetría, dos ejes de simetría y tres planos de simetría de este prisma cuadrangular.*

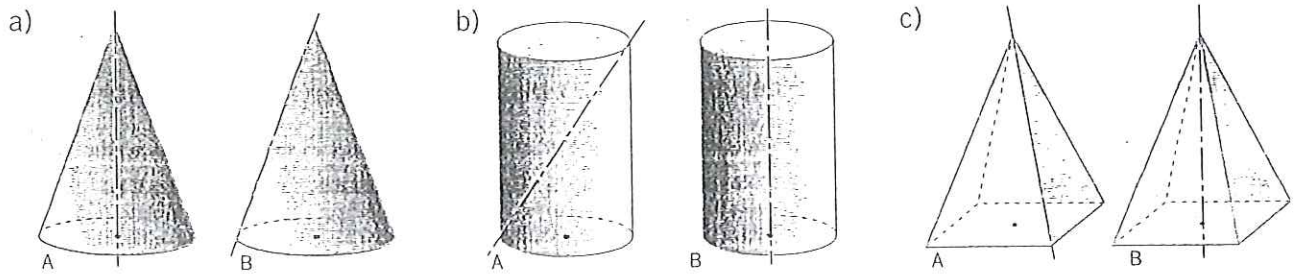


El centro de simetría es O; *los ejes,* e_1 *y* e_2, *y los planos,* α, β *y* γ.

266 Indica si los siguientes planos son planos de simetría de los cuerpos dibujados.

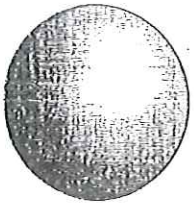


267 Indica en cada apartado cuáles de las rectas son ejes de simetría de los cuerpos.

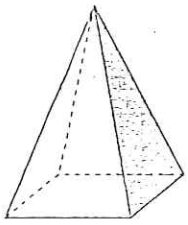


268 Dibuja algún plano de simetría de los siguientes cuerpos.

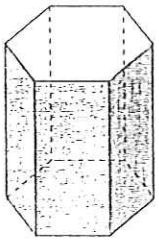
a)



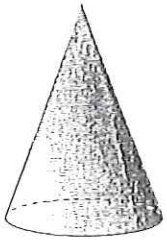
b)



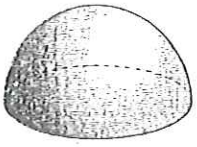
c)



d)



e)



269 Dibuja un cuerpo geométrico que tenga estos elementos de simetría.

a) Centro y plano de simetría.

b) Plano de simetría, pero no centro.

270 Señala si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Los conos tienen infinitos planos de simetría.

b) Los conos tienen centro de simetría.

c) Cualquier plano paralelo a la base de un cilindro es plano de simetría.

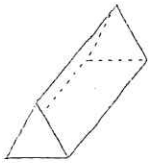
d) La esfera no tiene ejes de simetría.

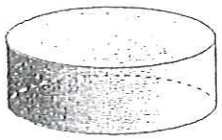
COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

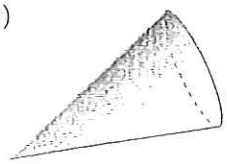
9. Cuerpos geométricos

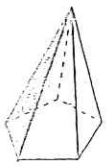
1 Si un poliedro tiene 12 vértices y 18 aristas, ¿cuántas caras tiene?

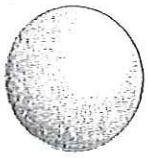
2 Escribe el nombre de los siguientes cuerpos.

a) 

b) 

c) 

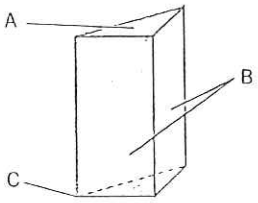
d) 

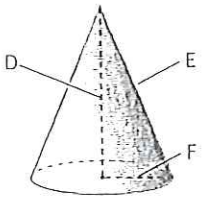
e) 

....

....

3 Escribe el nombre de los elementos señalados.

a) 

b) 

A: ..... C: ..... E: .....

B: ..... D: ..... F: .....

4 Señala si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Un prisma es un cuerpo de revolución.

b) La esfera es el único cuerpo que posee centro de simetría.

c) La altura de un cono pertenece al eje de simetría.

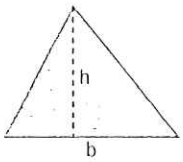
d) Un cilindro sólo tiene un plano de simetría.

10. Áreas y volúmenes

1 Perímetros y áreas de figuras planas

- El **perímetro** (p) de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados. En el caso de la circunferencia, su perímetro es su longitud, $p = 2\pi r$.
- El **área** de una figura compuesta por varias se determina a partir del área de las figuras simples que la componen. A continuación se muestran las áreas de algunas figuras simples.

Triángulo

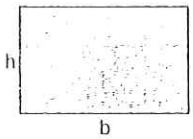


$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Cuadrado

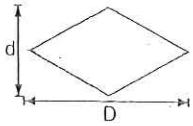
$A = l^2$

Rectángulo



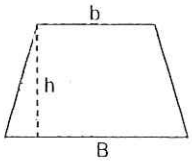
$A = b \cdot h$

Rombo



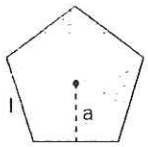
$A = \dfrac{D \cdot d}{2}$

Trapecio



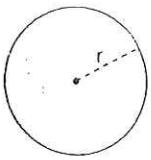
$A = \dfrac{B + b}{2} \cdot h$

Polígono regular



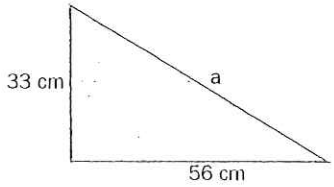
$A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

Círculo



$A = \pi \cdot r^2$

271 Calcula el perímetro de las siguientes figuras.



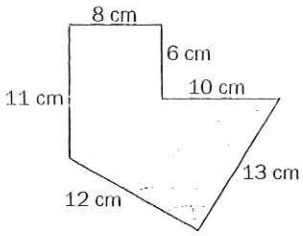
Ejemplo *Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular el lado que falta.*

$a^2 = 33^2 + 56^2 = 4\,225$

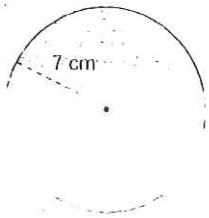
$a = \sqrt{4\,225} = 65$ *cm*

El perímetro es: $P = 33 + 56 + 65 = 154$ *cm*

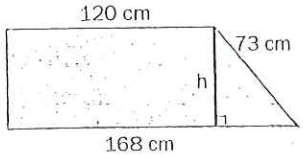
a)



b)



272 Calcula el área de las siguientes figuras.

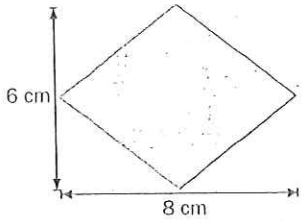


Ejemplo *Para calcular el área nos hace falta la altura, h, que se obtiene a partir del triángulo rectángulo que se forma. En él, la altura es un cateto, el otro cateto mide:* $x = 168 - 120 = 48$ *cm, y la hipotenusa mide 73 cm.*

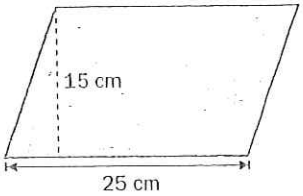
Aplicamos el teorema de Pitágoras: $73^2 - 48^2 = h^2$: $h = 55$ *cm*

Luego el área es: $A = \frac{120 + 168}{2} \cdot 55 = 7920 \text{ cm}^2$

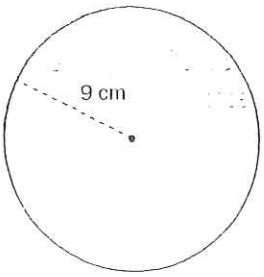
a)



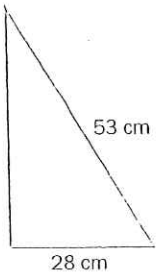
b)



c)

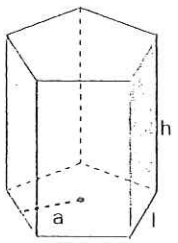


d)



2 Áreas de prismas y pirámides

Prisma



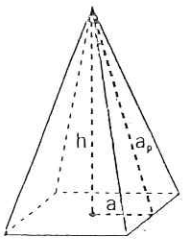
Área lateral: $A_{Lateral} = p \cdot h$

Área de las bases: (si la base es regular) $A_{Bases} = 2\,\dfrac{p \cdot a}{2} = p \cdot a$

$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Bases} = p \cdot h + p \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{Total} = p(h + a)$

Pirámide



Área lateral: $A_{Lateral} = \dfrac{1}{2} p \cdot a_p$

Área de la base: (si la base es regular) $A_{Base} = \dfrac{1}{2} p \cdot a$

$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \dfrac{1}{2} p \cdot a_p + \dfrac{1}{2} p \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{Total} = \dfrac{1}{2} p\,(a_p + a)$

273 ***Calcula el área total de una pirámide de base cuadrada de 12 centímetros de lado y 8 centímetros de altura.***

Calculamos la apotema de la pirámide. En el triángulo rectángulo marcado aplicamos el teorema de Pitágoras:

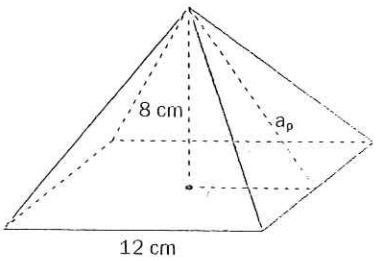
$a_p^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow a_p = \sqrt{100} = 10$ *cm*

Como la base es un cuadrado, su perímetro es: $12 \cdot 4 = 48$ *cm*

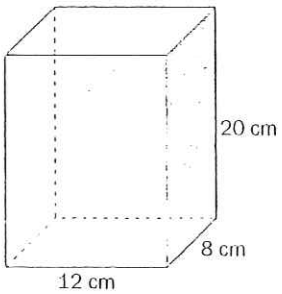
Por tanto: $A_{Lateral} = \dfrac{48 \cdot 10}{2} = 240\ cm^2$

Por otra parte, $A_{Base} = 12^2 = 144\ cm^2$

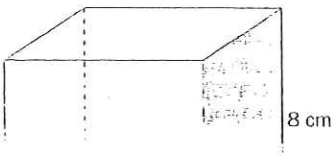
Luego el área total es: $A_{Total} = 240 + 144 = \boxed{384\ cm^2}$



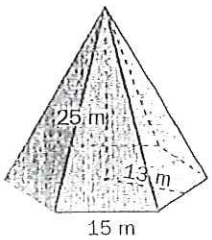
274 Calcula el área total de un prisma rectangular cuyas dimensiones miden 8, 12 y 20 centímetros. Ten en cuenta que la base del ortoedro no es un polígono regular, sino un rectángulo.



275 Calcula el área total de un cubo de 8 centímetros de arista. Ten en cuenta que la base del cubo es un cuadrado.



276 Calcula las áreas lateral y total de los siguientes cuerpos geométricos.



Calculamos el área de la base:

$$A_{Base} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 15 \cdot 13}{2} = 585\ cm^2$$

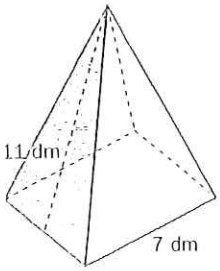
Para calcular el área lateral necesitamos la apotema lateral:

$$a_p = \sqrt{25^2 + 13^2} = 28{,}18\ cm$$

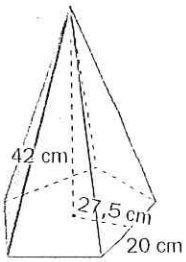
$$A_{Lateral} = \frac{p \cdot a_p}{2} = \frac{6 \cdot 15 \cdot 28{,}18}{2} = 1\,268{,}1\ cm^2$$

$$A_{Total} = A_{Base} + A_{Lateral} = 585 + 1\,268{,}1 = 1\,853{,}1\ cm^2$$

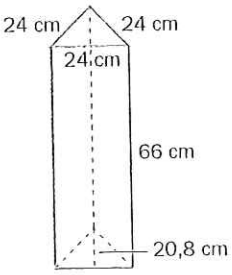
b)



a)

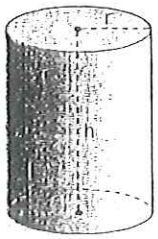


c)



3 Áreas de cuerpos de revolución

Cilindro

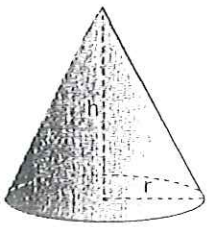


$A_{Base} = \pi \cdot r^2$

$A_{Lateral} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$A_{Total} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Cono

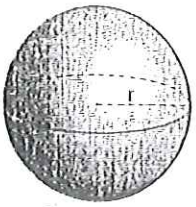


$A_{Base} = \pi \cdot r^2$

$A_{Lateral} = \pi \cdot r \cdot g$

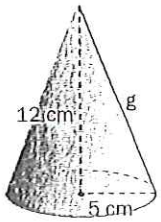
$A_{Total} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$

Esfera



$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

277 *Calcula el área total de un cono de 12 centímetros de altura y cuya base tiene un diámetro de 10 centímetros.*



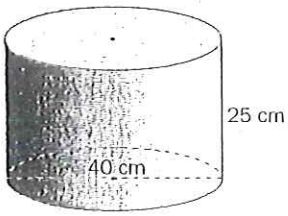
Calculamos primero la generatriz. Como tenemos un triángulo rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow g = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

Por tanto:

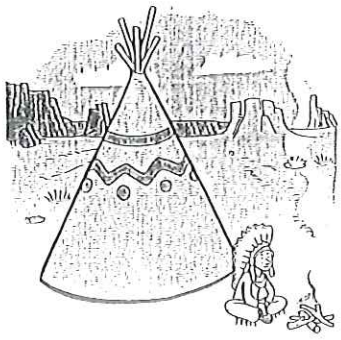
$$\left.\begin{array}{l} A_{Lateral} = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 13 = 204{,}1 \text{ cm}^2 \\ A_{Base} = 3{,}14 \cdot 5^2 = 78{,}5 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} A_{Total} = 204{,}1 + 78{,}5 = \boxed{282{,}6 \text{ cm}^2}$$

278 Un cilindro tiene 25 centímetros de altura. Si el diámetro de la base mide 40 centímetros, calcula su área total.

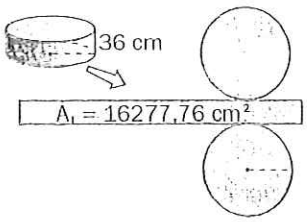


279 Calcula el área de una esfera de 24 centímetros de radio.

280 Un tipi indio tiene 5 metros de diámetro y 6 metros de altura. ¿Cuánta tela hará falta para construir uno?

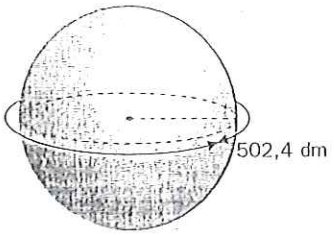


281 Un cilindro tiene 36 centímetros de altura y su área lateral mide 16 277,76 centímetros cuadrados. ¿Cuál es la longitud del radio de la base?



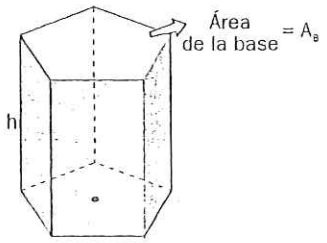
282 El radio de la base de una lata cilíndrica mide 8 centímetros, y su altura es la mitad que la longitud de la circunferencia de su base. ¿Cuánta hojalata hay que usar para fabricarla?

283 La longitud de la circunferencia máxima de una esfera mide 502,4 decímetros. Calcula el área de la esfera.



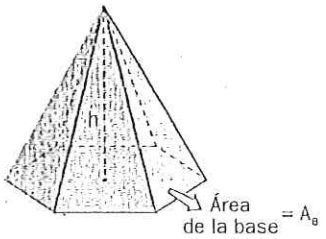
4 Volúmenes de prismas y pirámides

Prisma



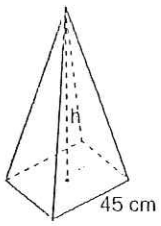
$$V_{Prisma} = A_B \cdot h$$

Pirámide



$$V_{Pirámide} = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

284 ***Una pirámide de base cuadrada tiene de arista de la base 45 centímetros, y su altura es la mitad del perímetro de la base. Calcula su volumen.***



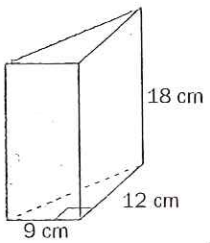
Calculamos el perímetro de la base, y luego, la altura de la pirámide:

$$p = 4 \cdot 45 = 180 \Rightarrow h = \frac{180}{2} = 90 \text{ cm}$$

El área de la base es: $A_B = l^2 = 45^2 = 2025 \text{ cm}^2$. *Entonces:*

$$V = \frac{2025 \cdot 90}{3} = \boxed{60\,750 \text{ cm}^3}$$

285 Calcula el volumen de un prisma triangular de 18 centímetros de altura y cuya base es un triángulo rectángulo de catetos 9 y 12 centímetros.

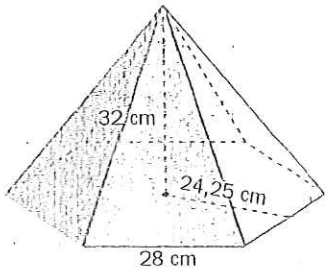


286 Un depósito de agua tiene forma de prisma rectangular con lados de la base de 25 y 20 metros. Calcula la altura para que pueda contener 1 000 metros cúbicos de agua.

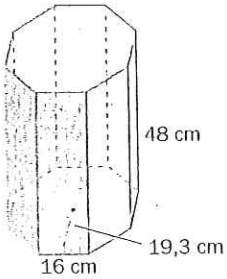
287 El área total de un cubo es de 150 centímetros cuadrados. Calcula su volumen.

288 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

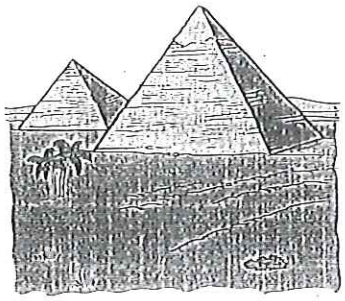
a)



b)

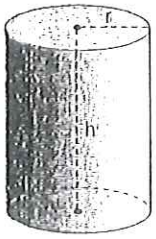


289 La pirámide de Kefrén, en Egipto, tiene una base cuadrada de 214,5 metros de lado y una altura de 143,2. Calcula su volumen.



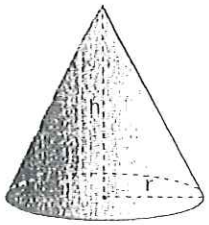
5 Volúmenes de cuerpos de revolución

Cilindro



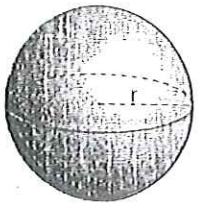
$$V_{Cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Cono



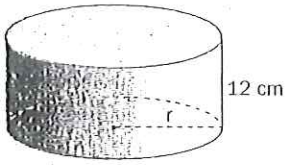
$$V_{Cono} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Esfera



$$V_{Esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

290 ***El área lateral de un cilindro es de 1 130,4 centímetros cuadrados, y su altura mide 12 centímetros. Halla su volumen.***

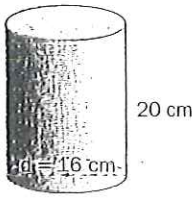


Primero calculamos el radio del cilindro a partir del área lateral:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Rightarrow 1\,130{,}4 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \cdot 12 \Rightarrow r = \frac{1\,130{,}4}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 12} = 15 \text{ cm}$$

Por tanto, el volumen es: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 12 = \boxed{8478 \text{ cm}^3}$

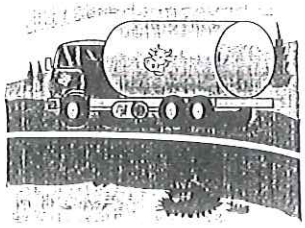
291 Calcula el volumen de un cilindro si su base tiene 16 centímetros de diámetro y su altura es de 20 centímetros.



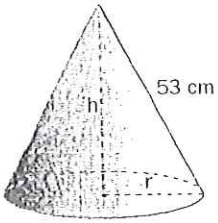
292 Un cilindro tiene por altura 100,48 centímetros, que coincide con la longitud de la circunferencia de la base. ¿Cuál es su volumen?

293 Calcula el volumen de un cono de 5 centímetros de radio y 12 de altura.

294 El depósito de un camión cisterna tiene forma cilíndrica de 6 metros de longitud y 1,5 metros de radio. ¿Cuántos metros cúbicos de leche puede transportar? Expresa el resultado también en litros.



295 Calcula el volumen de un cono de 56 centímetros de diámetro y 53 de generatriz.



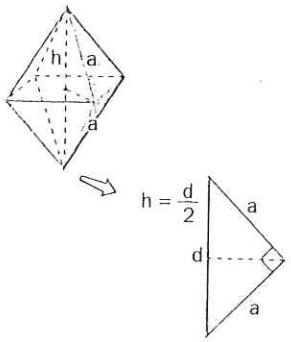
296 Una esfera tiene 15 centímetros de radio. Calcula su volumen.

297 El área de una esfera es de 6 079,04 centímetros cuadrados. Calcula su volumen.

6 Áreas y volúmenes de cuerpos compuestos

Para calcular el área y el volumen de un **cuerpo compuesto**, lo primero que hay que hacer es descomponer dicho cuerpo en otros más sencillos cuyas áreas y volúmenes podamos calcular.

298 ***Calcula el volumen de un octaedro que tiene 15 centímetros de arista.***



El octaedro está formado por dos pirámides de base cuadrada unidas por dicha base. La altura de las pirámides es la mitad de la diagonal del cuadrado. Todas sus aristas miden lo mismo.

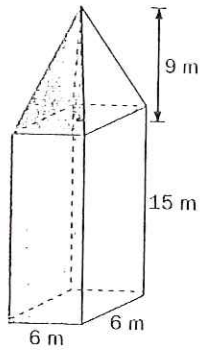
Calculamos primero la diagonal, para luego calcular la altura:

$$d^2 = 15^2 + 15^2 = 450 \Rightarrow d = \sqrt{450} = 21{,}21 \text{ cm} \Rightarrow h = \frac{d}{2} = \frac{21{,}21}{2} = 10{,}605 \text{ cm}$$

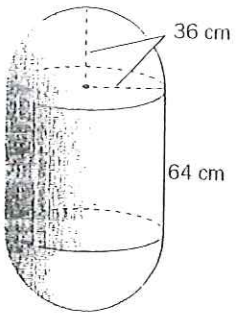
El volumen de cada pirámide es: $V_p = \frac{A_B \cdot h}{3}$, *donde* $A_B = l^2$

Luego el volumen del octaedro es: $V = 2 \cdot V_p = 2 \cdot \frac{15^2 \cdot 10{,}605}{3} = \boxed{1590{,}75 \text{ cm}^3}$

299 Calcula el volumen de este cuerpo compuesto.



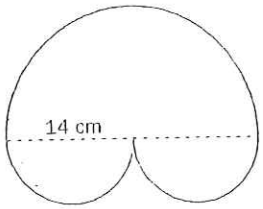
300 Calcula el volumen de este cuerpo compuesto.



COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

10. Cuerpos geométricos

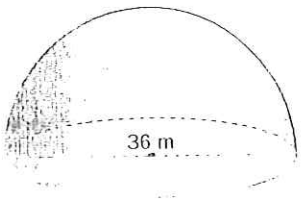
1 Calcula el área de la siguiente figura formada por semicírculos.



2 Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular que tiene 12 centímetros de lado de la base y 30 de altura.

3 Una pequeña piscina de forma circular tiene un diámetro de 6 metros y una profundidad de 1,5. ¿Qué cantidad de agua puede contener como máximo?

4 La cúpula semiesférica de una catedral tiene 36 metros de diámetro. Si repararla cuesta 300 euros el metro cuadrado, ¿a cuánto ascenderá el coste total de la reparación?

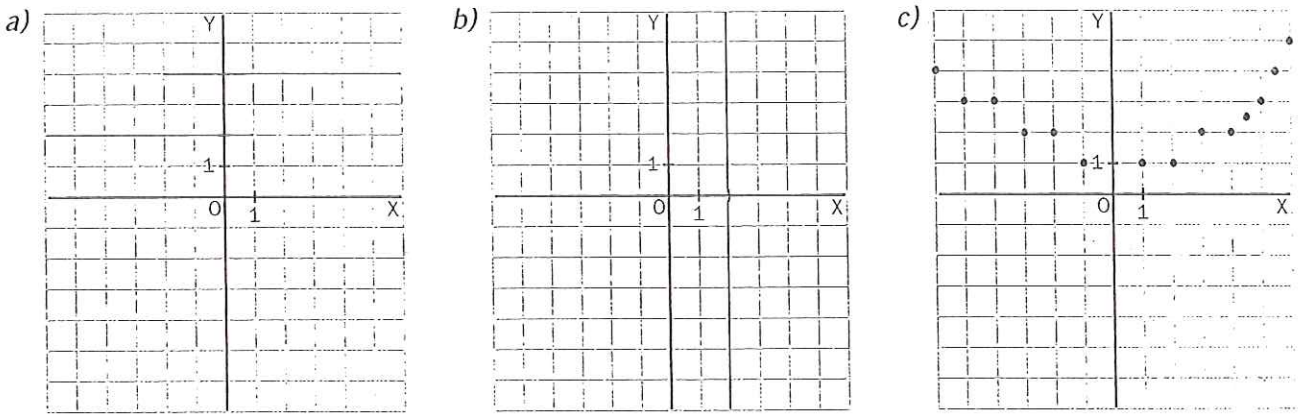


11. Funciones

1 Relaciones funcionales

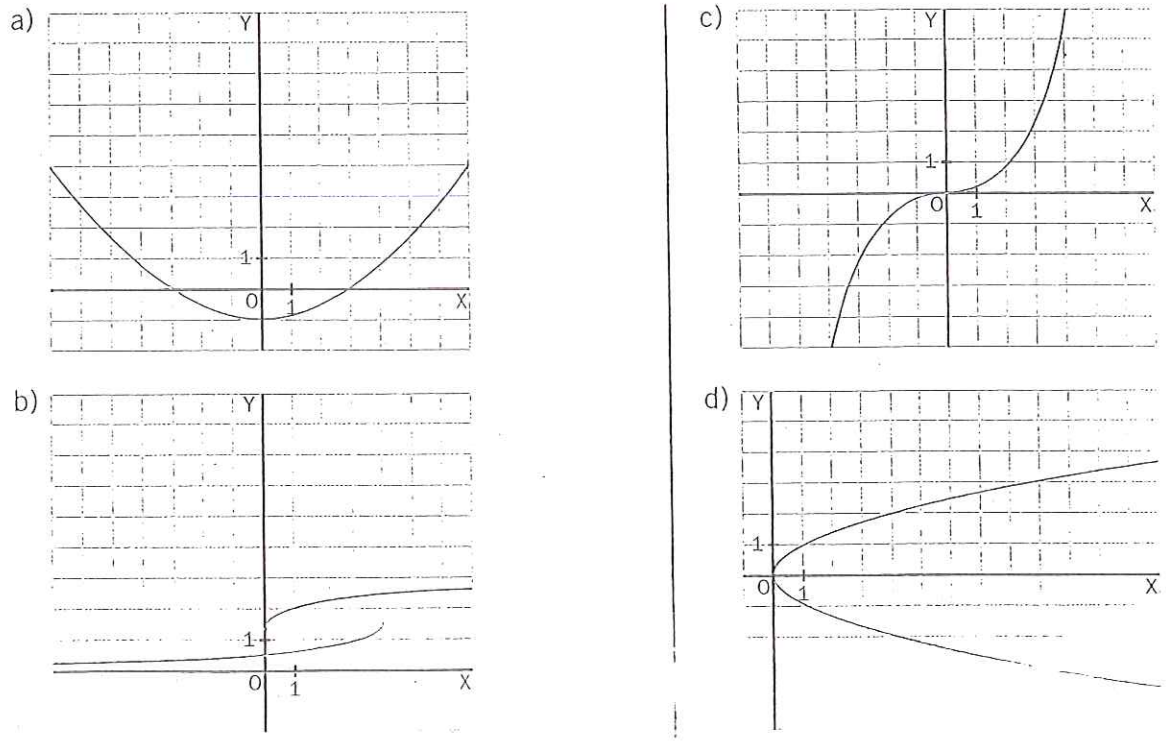
- Una **función** es la relación existente entre dos magnitudes, de forma que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda. A este valor se le llama **imagen**.
- Las magnitudes que intervienen en una función son:
  - **La variable independiente** (x), que se fija previamente.
  - **La variable dependiente**, $y = f(x)$, cuyo valor se obtiene a partir del valor de la variable independiente.

301 *Indica cuál de las tres gráficas es función y justifica la respuesta.*



Solo es función la tercera gráfica. En las otras dos hay valores de x a los que les corresponde más de una imagen; en particular en la segunda, un solo punto (x = 2) tiene infinitas imágenes.

302 Indica si las siguientes gráficas son funciones.



303 En las siguientes relaciones, indica cuáles son las variables independiente y dependiente.

Ejemplo *Cada litro de leche cuesta 0,60 euros.*

Cuanta más leche compremos, más costará. Por tanto:

Variable independiente: cantidad de leche. Variable dependiente: precio final.

a) Cuanto mayor es la velocidad de un coche, más gasolina gasta cada 100 kilómetros.

b) A medida que pasa el tiempo quedan menos ballenas azules en los océanos.

c) Cuanto más estudio Matemáticas, más nota consigo.

304 Dada la función $f(x) = x^2 + 3x - 1$, calcula el valor que toma la variable dependiente, $f(x)$, según los valores de la variable independiente, x, dados.

Ejemplo $x = 4$ $\quad f(4) = 4^2 + 3 \cdot 4 - 1 = 16 + 12 - 1 = 27$

a) $x = 2$

b) $x = -5$

c) $x = 0$

305 Dada la función $f(x) = 2x - 1$, calcula el valor de la variable x para que la imagen tenga el valor indicado.

Ejemplo $f(x) = 11$ $\quad 11 = 2x - 1 \Rightarrow$ *Se resuelve la ecuación* $\Rightarrow 10 = 2x \Rightarrow x = 5$

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = -7$

c) $f(x) = 0$

2 Formas de expresar una función

Una función puede expresarse de varias formas:

- Mediante una **fórmula**.
- Mediante una **tabla**.
- Mediante una **gráfica**.

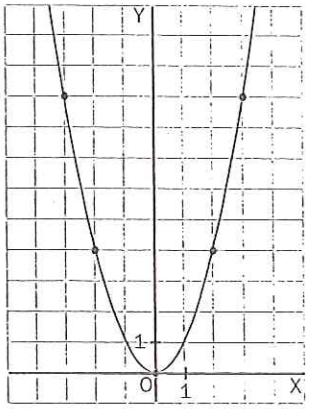
306 *Encuentra la relación entre las variables dada por la siguiente tabla y representa la función.*

x	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*0*	*1*	*4*	*9*

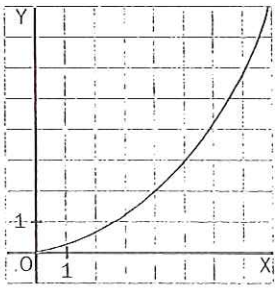
Si observamos los valores que toma f(x) *con respecto a los valores de* x, *vemos que* f(x) *es el cuadrado de* x; *por tanto, esta función la podemos expresar en forma de fórmula como:* $f(x) = x^2$.

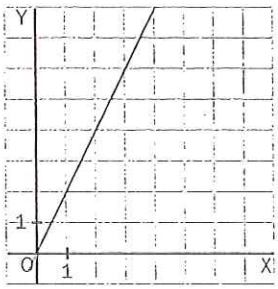
Para realizar la gráfica partimos de los valores de la tabla dados y completamos estos datos con algún punto más obtenido de dar valores negativos a x. *Todos estos puntos los representamos en la gráfica y los unimos mediante una línea.*

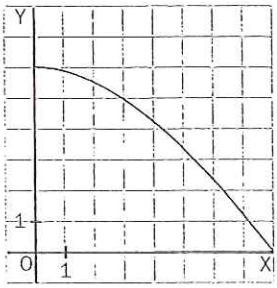
x	−1	−2	−3
f(x)	1	4	9

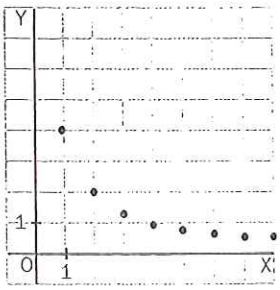


307 Relaciona las gráficas siguientes con las situaciones indicadas.

a) 

b) 

c) 

d) 

I. Precio de una bolsa de patatas dependiendo de su peso.

II. Diámetro de un globo cuando sale el aire lentamente.

III. Duración de una carrera según su longitud.

IV. Tiempo que se tarda en acabar un trabajo dependiendo del número de personas.

308 A partir de los valores dados de x, construye una tabla de valores para cada función.

Ejemplo $f(x) = x^2 - x$

Damos valores a la x, *sustituimos en* f(x) *y calculamos los valores de* f(x) *correspondientes.*

x	$f(x)$
-3	$(-3)^2 - (-3) = 12$
-2	$(-2)^2 - (-2) = 6$
-1	$(-1)^2 - (-1) = 2$
0	$0^2 - 0 = 0$
1	$1^2 - 1 = 0$
2	$2^2 - 2 = 2$
3	$3^2 - 3 = 6$

a) $f(x) = 2x - 3$

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

b) $f(x) = 8 - 2x$

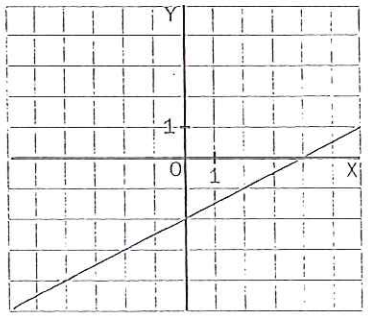
x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

c) $f(x) = x^2 + 1$

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

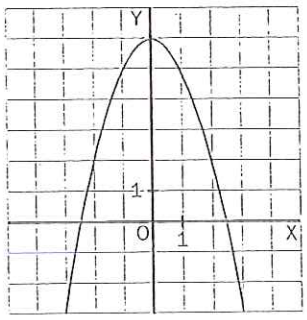
309 Completa la tabla de valores para estas dos funciones a partir de sus gráficas.

a)



x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

b)

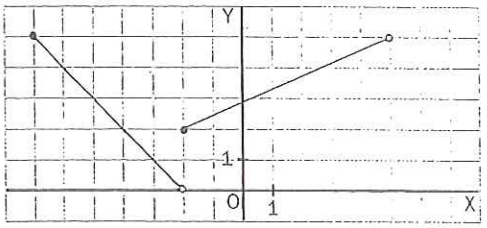


x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

3 Estudio gráfico de funciones: dominio, recorrido, continuidad, simetría y periodicidad

- **Dominio**: es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente.
- **Recorrido**: son los valores que toma la variable dependiente.
- Una función **continua** es aquella que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.
- Una función es **simétrica respecto al eje** *OY* cuando su gráfica también lo es.
- Una función es **simétrica respecto al origen** cuando su gráfica también lo es.
- Una función es **periódica** cuando los valores que toma la variable dependiente, $f(x)$, se repiten cada cierto intervalo fijo, llamado **período**.

310 ***Indica el dominio y el recorrido de la función que se muestra en la gráfica. ¿En qué puntos la función no es continua?***



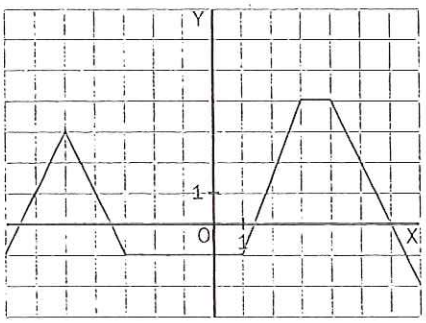
Dominio: desde −7 hasta −2 y desde −2 hasta 5 (los valores de x).

Recorrido: desde 0 hasta 5 (los valores de y).

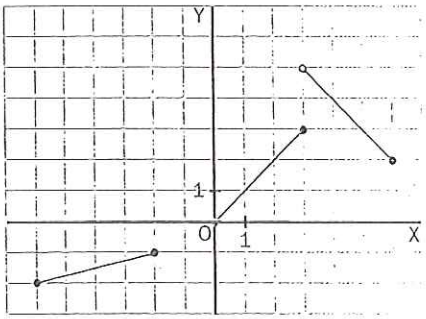
La función no es continua en el punto x = −2. En este punto la imagen es 2, y no 0. Esto se indica con el punto relleno que quiere decir que la función está definida en ese punto, y con un círculo en el punto donde no está definida la función.

311 Obtén el dominio y el recorrido de las funciones siguientes.

a)

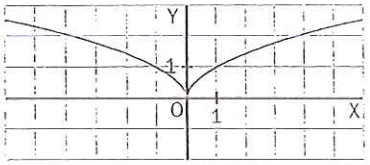


b)

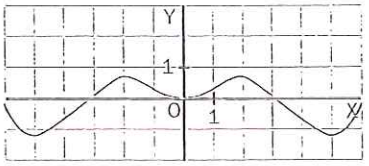


312 Indica cuáles de las siguientes funciones son continuas.

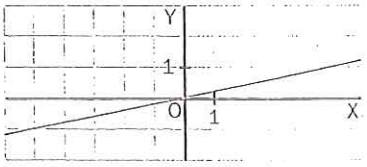
a)



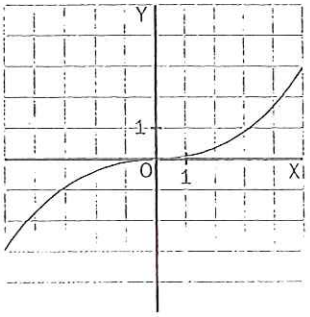
c)



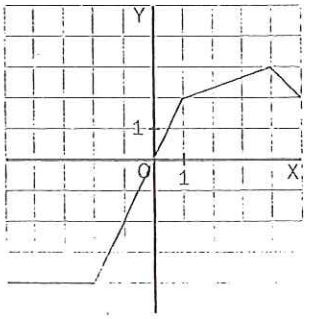
e)



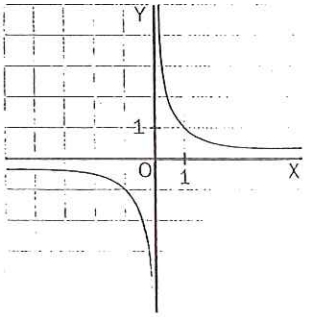
b)



d)



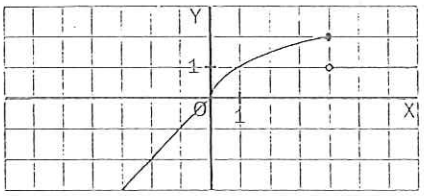
f)



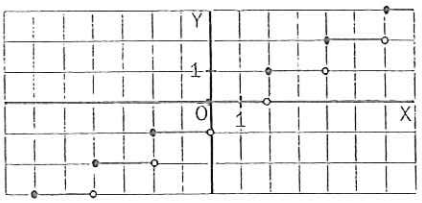
– Son continuas las funciones .....

313 Indica en qué puntos las funciones representadas no son continuas.

a)

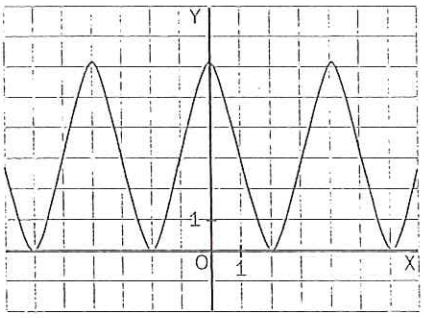


b)

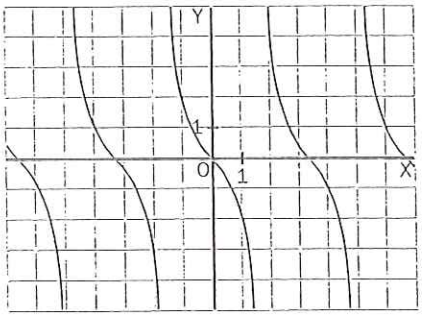


314 *Observa las siguientes funciones y determina si son simétricas respecto al eje* OY *o respecto al origen.*

a)



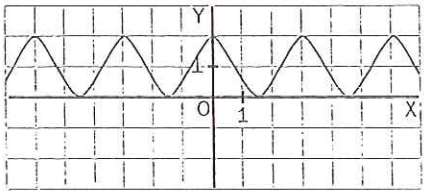
b)



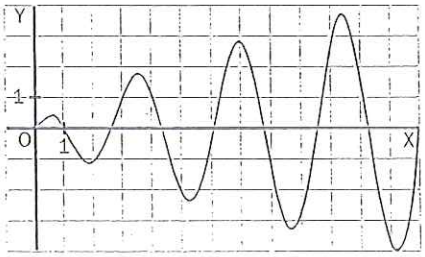
La primera gráfica es simétrica respecto al eje OY, *y la segunda lo es respecto al origen.*

315 De las siguientes funciones, indica las que sean simétricas respecto al eje *OY*, las que sean simétricas respecto al origen y las funciones periódicas.

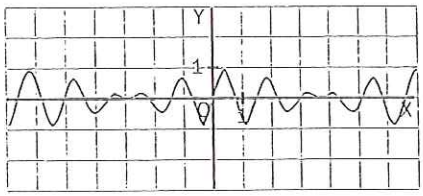
a)



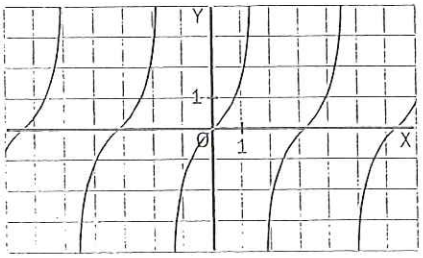
b)



c)



d)



- Son simétricas respecto al eje *OY* las funciones .....
- Son simétricas respecto al origen las funciones .....
- Son periódicas las funciones .....

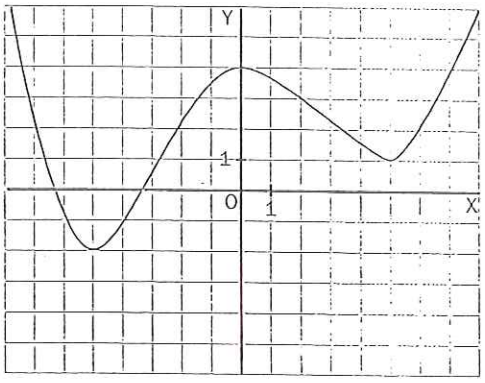
4 Estudio gráfico de funciones: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

- Una función es **creciente** si al aumentar los valores de la variable x aumentan los de $f(x)$.
- Una función es **decreciente** si al aumentar los valores de la variable x disminuyen los de $f(x)$.
- **Máximos relativos** de una función son los puntos en los que su ordenada es mayor que la de los puntos próximos (tanto a su izquierda como a su derecha).
- **Mínimos relativos** de una función son los puntos en los que su ordenada es menor que la de los puntos próximos.
- Los máximos de mayor valor de la función se llaman **máximos absolutos**, y los mínimos de menor valor, **mínimos absolutos**.

316 *Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función que se muestra en la gráfica.*

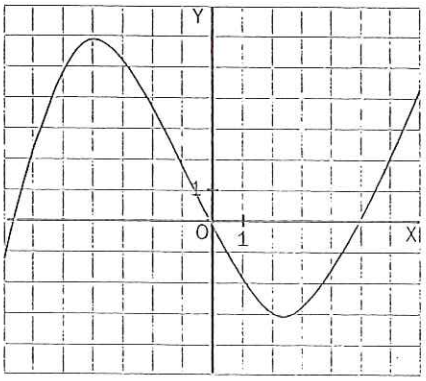
Es decreciente desde x = *−8 hasta* x = *−5 y desde* x = *0 hasta* x = *5.*

Es creciente desde x = *−5 hasta* x = *0 y desde* x = *5 hasta* x = *8.*

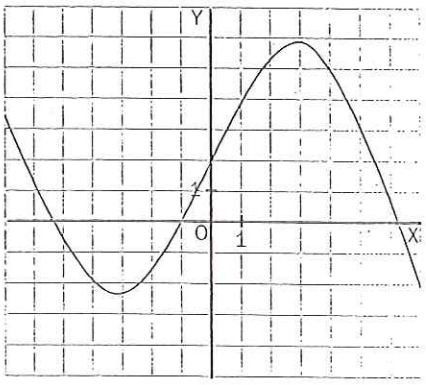


317 Marca de azul las partes crecientes y de rojo las decrecientes de las siguientes funciones.

a)

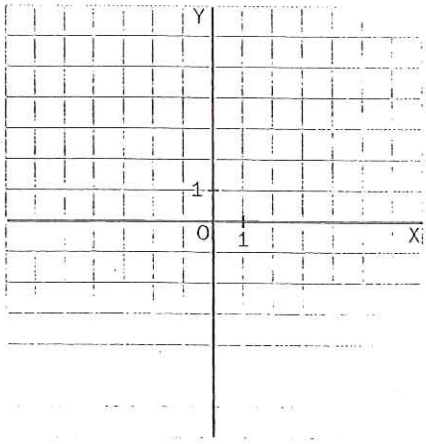


b)



318 Dibuja una función que cumpla las siguientes características.

- Sea creciente entre $x = -8$ y $x = -2$.
- Constante entre $x = -2$ y $x = 1$.
- Creciente entre $x = 1$ y $x = 3$.
- Decreciente entre $x = 3$ y $x = 8$.



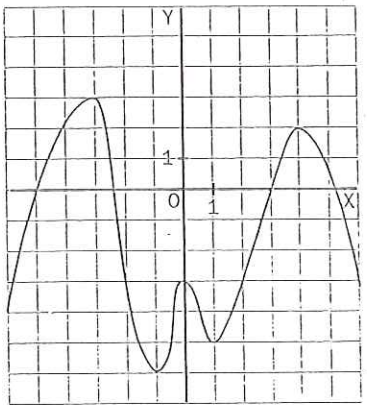
319 *Indica en qué valores de la variable x hay máximos o mínimos relativos en la siguiente función, y determina los máximos y los mínimos absolutos.*

Los máximos de esta función son los puntos (−3, 3), (0, −3) y (4, 2).

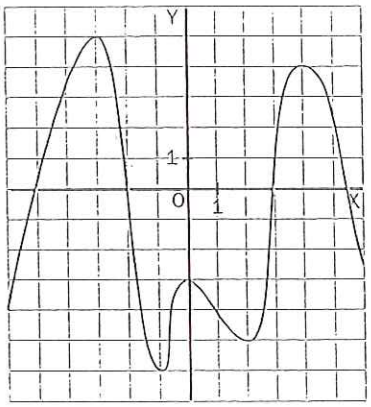
El máximo absoluto es el punto (−3, 3) y los relativos: (0, −3) y (4, 2).

Los mínimos de la función son los puntos: (−1, −6) y (1, −5).

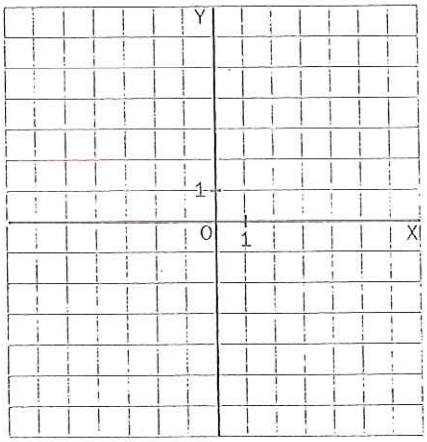
El mínimo absoluto es el punto (−1, −6) y el relativo el (1, −5).



320 Identifica en la siguiente gráfica los máximos y los mínimos.



321 Dibuja una gráfica que tenga un máximo relativo en el punto (4, 5), un mínimo relativo en el punto (−1, −3) y un máximo absoluto en el punto (7, 10).



5 Funciones y vida cotidiana

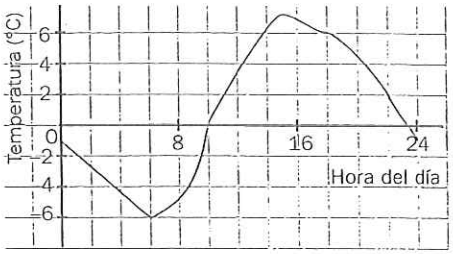
En la vida diaria, gran cantidad de información nos llega expresada a través de gráficas y funciones.

322 *La siguiente gráfica nos muestra las temperaturas de un día de invierno en Toledo.*

a) ¿Es una función?

b) ¿Cuál fue la temperatura máxima?

c) ¿A qué hora se produjo?



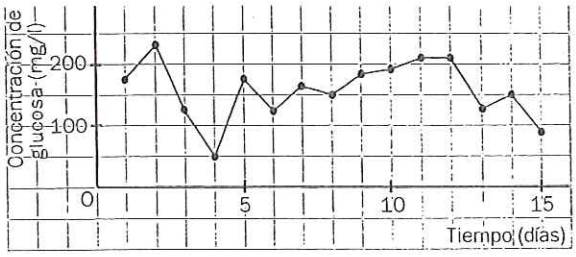
a) Sí, ya que a cada valor de x (hora del día) le corresponde un único valor de y (temperatura).

b) 7 grados centígrados.

c) A las 15.00 (tres de la tarde).

323 La siguiente gráfica muestra los datos de glucosa de Óscar, un niño diabético, a primera hora de la mañana durante 15 días. A partir de su observación, responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Es una función?



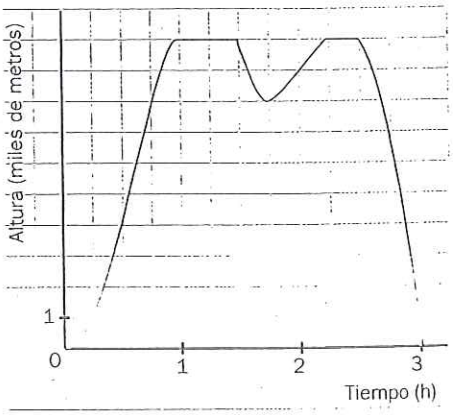
b) ¿Qué día tuvo la concentración más alta?

c) ¿Qué días la concentración de glucosa fue inferior a 100 miligramos por litro?

324 La variación de altura realizada por un avión en un vuelo de 3 horas viene reflejada en la siguiente gráfica.

a) ¿En qué momento se alcanza la altura máxima?

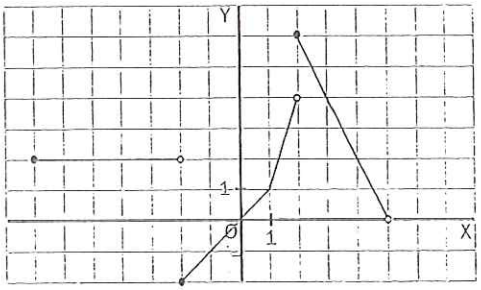
b) Durante el vuelo, el avión, por motivos de turbulencias, se ve obligado a descender para luego volver a subir. ¿Cuánto dura ese período de tiempo?



COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

11. Funciones

1 A partir de la siguiente función, determina:

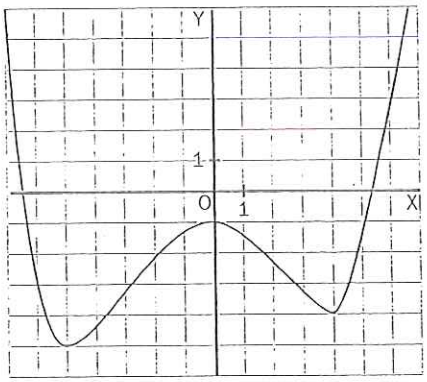


a) El dominio y el recorrido.

b) Indica las imágenes de dicha función en los puntos $x = -5$ y $x = 0$.

c) ¿Es continua la función? En caso negativo, indica los puntos donde no es continua.

2 Observa la siguiente gráfica y responde.



a) Indica los intervalos en los que la siguiente función es creciente.

b) ¿En qué puntos hay mínimos relativos?

c) Calcula las coordenadas del máximo de la función.

12. Funciones lineales

1. Función constante

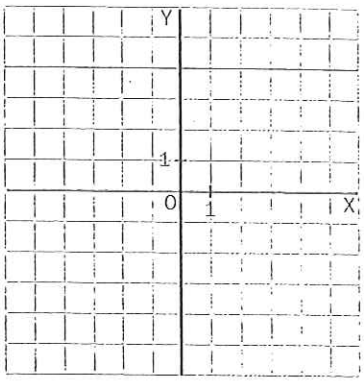
- Una **función constante** se representa con la expresión $f(x) = k$, donde k es un número cualquiera.
- Su representación es una recta horizontal que corta el eje OY (ordenadas) en el punto $(0, k)$.

325 *Representa la función* f(x) = 4.

Damos valores a x, *siendo el valor de* f(x) *siempre 4, porque es una función constante.*

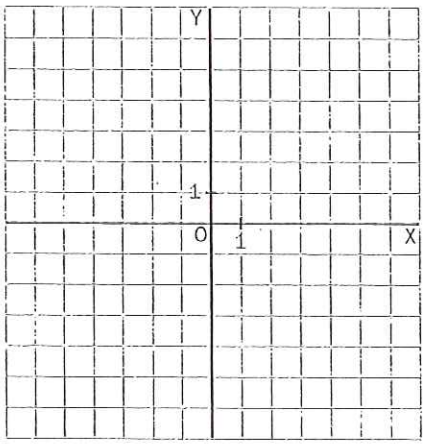
La representación corresponde a una recta horizontal paralela al eje OX.

x	$f(x)$
-2	4
-1	4
0	4
1	4
2	4

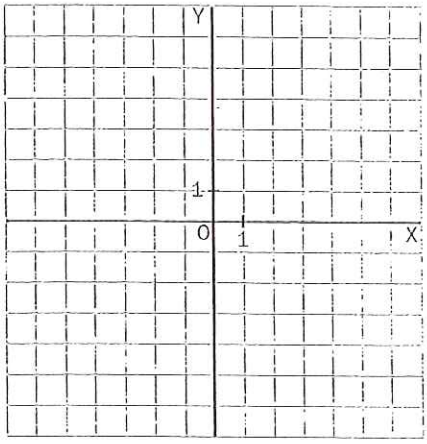


326 Representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2$



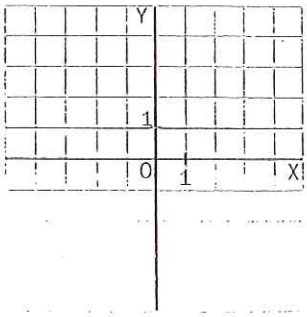
b) $f(x) = -3$



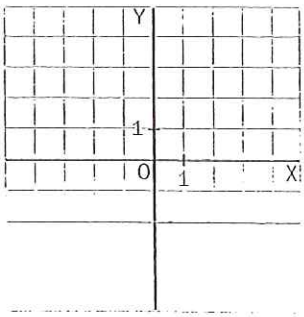
327 Une con una flecha cada función con su expresión correspondiente.

a) $f(x) = -2$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = 1$ d) No es función.

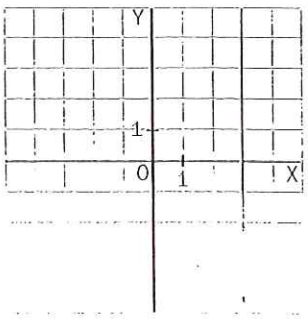
I.



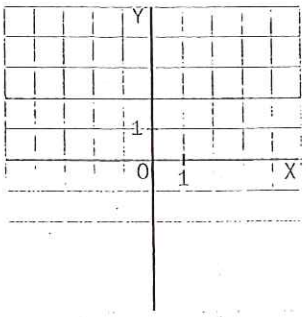
II.



III.



IV.



2 Función de proporcionalidad directa

- Una **función de proporcionalidad directa** viene determinada por la expresión $f(x) = mx$, donde m es un número cualquiera y se denomina **pendiente**.
- Su representación es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas (0, 0). Si $m > 0$, la función es creciente. Si $m < 0$, la función es decreciente.

328 Indica la pendiente de las siguientes funciones.

Ejemplo $f(x) = -3x$ *Pendiente* $= -3$

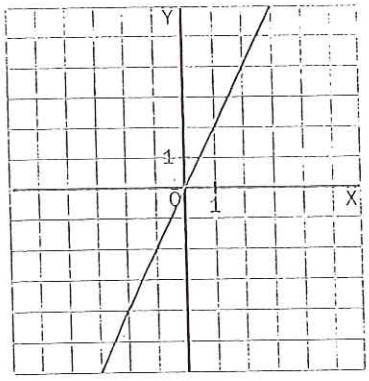
a) $f(x) = -4x$ b) $f(x) = 0{,}2x$ c) $f(x) = \frac{3}{2}x$ d) $f(x) = -2{,}5x$

329 *Representa en una gráfica la función* $f(x) = 2x$.

Damos valores a x y calculamos el valor de f(x). Los resultados los recogemos en una tabla.

Finalmente representamos los puntos en la gráfica y los unimos mediante una recta.

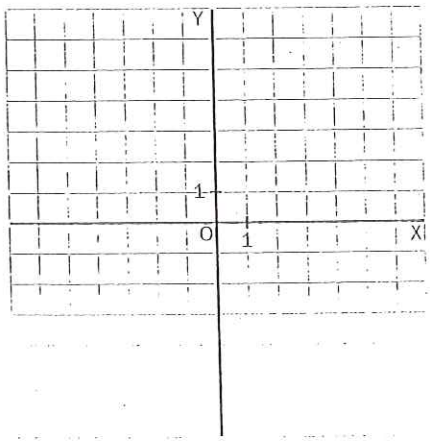
x	$f(x)$
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4



330 Representa las siguientes funciones.

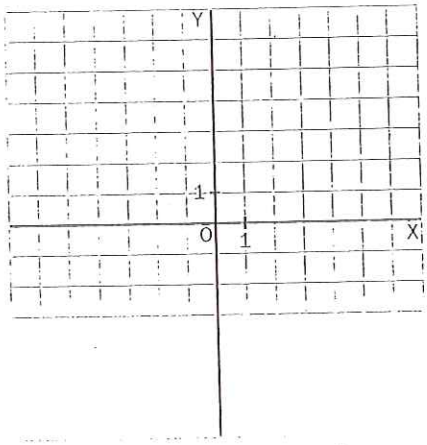
a) $f(x) = 0{,}5x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



b) $f(x) = -2x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



3 Función lineal

- Una **función lineal** se representa mediante la fórmula $f(x) = mx + n$, donde m y n son números cualesquiera. A m se la denomina **pendiente**, y a n, ordenada en el origen. Si $n = 0$, las funciones son de **proporcionalidad directa**.
- Su representación es una línea recta que corta el eje OY (ordenadas) en el punto $(0, n)$. Si $m > 0$, la función es creciente. Si $m < 0$, la función es decreciente.

331 Escribe la expresión de la función lineal que cumple las siguientes condiciones.

Ejemplo *Pendiente 2 y ordenada en el origen 5* $\Rightarrow f(x) = 2x + 5$

a) Pendiente 6 y ordenada en el origen -3

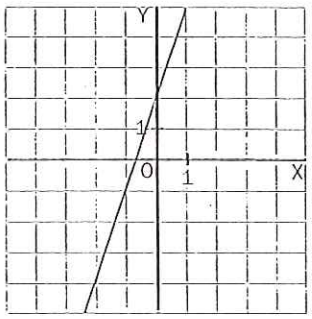
b) Pendiente -2 y ordenada en el origen 5

c) Pendiente -1 y ordenada en el origen -8

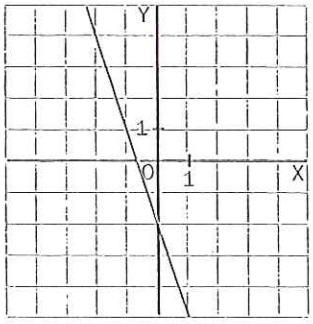
332 Relaciona mediante una flecha cada expresión matemática con su gráfica correspondiente.

a) $f(x) = -3x - 2$ b) $f(x) = 3x - 2$ c) $f(x) = 3x + 2$ d) $f(x) = -3x + 2$

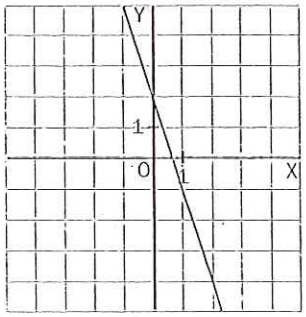
I.



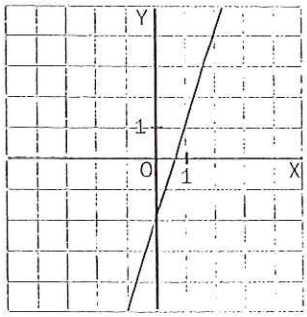
II.



III.



IV.



333 Completa la siguiente tabla.

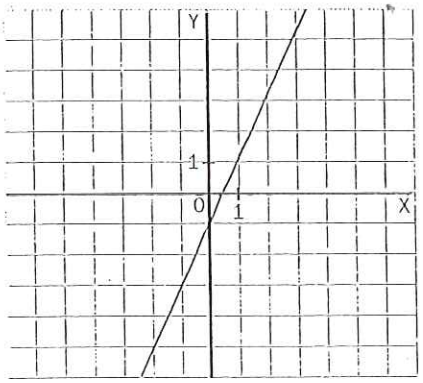
Función lineal	Pendiente	Ordenada en el origen	Crecimiento / Decrecimiento
$f(x) = x + 3$	*1*	*3*	*Creciente*
$f(x) = 5x - 4$			
$f(x) = 7 - 2x$			
	-4	-6	
	2,5	$-3,5$	

334 *Representa la función* f(x) = 2x − 1.

Damos valores a x *y completamos la tabla de valores.*

A partir de estos datos dibujamos la gráfica.

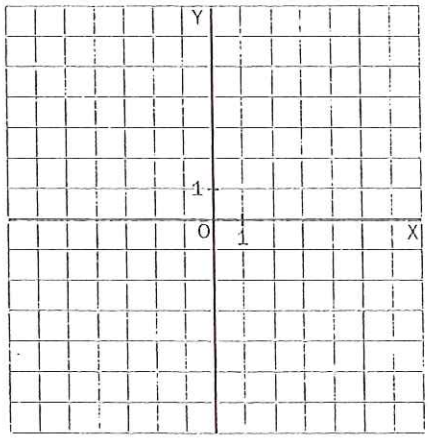
x	$f(x)$
−2	−5
−1	−3
0	−1
1	1
2	3
3	5



335 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

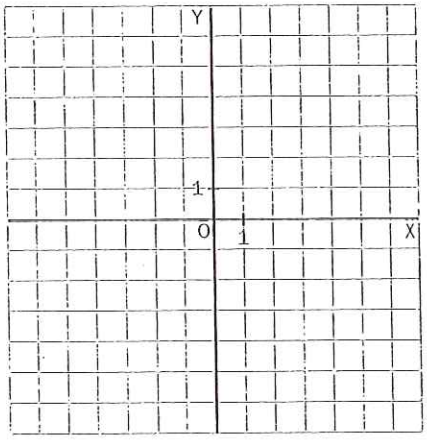
a) $f(x) = 1 - x$

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$					



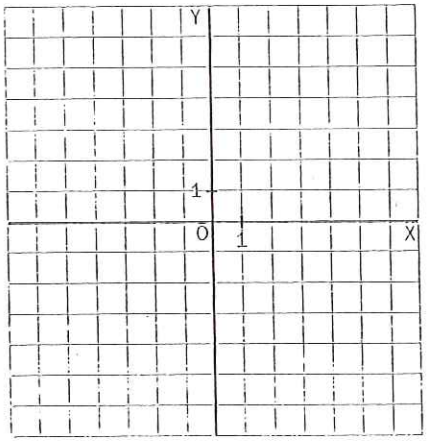
b) $f(x) = 0{,}5x - 2$

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$					



336 Dibuja en los ejes de coordenadas cuatro rectas que cumplan lo siguiente: pendiente 2 y ordenadas en el origen, respectivamente, 1, 4, −2, −5.

¿Qué observas en estas rectas?



4 Aplicaciones de las funciones lineales

Muchas funciones son el reflejo de la vida cotidiana. Así, las **funciones lineales** representan situaciones reales, como relaciones entre pesos y precios, tiempo y distancia recorrida en un movimiento...

337 Escribe la función que representa cada una de las siguientes relaciones.

Ejemplo *El precio del aceite de oliva es de 4,50 euros por litro (el precio depende del número de litros). Precio = 4,5 · (N.º de litros)* $\Rightarrow f(x) = 4{,}5x$

a) Cuando nació mi primo, yo tenía 14 años (mi edad depende de la edad de mi primo).

b) Revelar un carrete cuesta 2 euros, y cada fotografía, 0,30 euros (el precio depende del número de fotografías).

c) Faltan 40 días para mi cumpleaños (los días que faltan para mi cumpleaños dependen del número de días que vayan pasando).

338 ***Los precios de un taxi son los siguientes: bajada de bandera, 2,50 euros, y cada kilómetro recorrido, 0,50 euros más. Escribe la fórmula que relacione el precio con los kilómetros recorridos, y luego representa la función.***

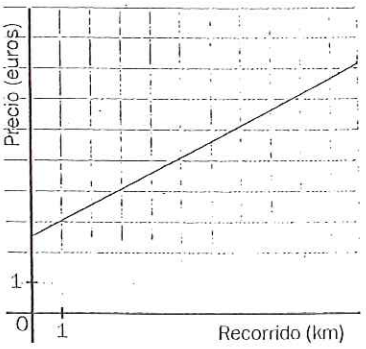
La fórmula viene determinada por un valor fijo (la bajada de bandera) y un precio variable que depende del número de kilómetros recorridos: precio = 2,5 + 0,5 · (n.º de km).

Si pasamos esto a la forma habitual de escribir las funciones: $\boxed{f(x) = 2{,}5 + 0{,}5 \cdot x}$

Damos valores a x y calculamos f(x).

En este caso no tiene sentido dar valores negativos, puesto que no existen distancias negativas.

x	f(x)
0	2,5
1	3
2	3,5
3	4
4	4,5

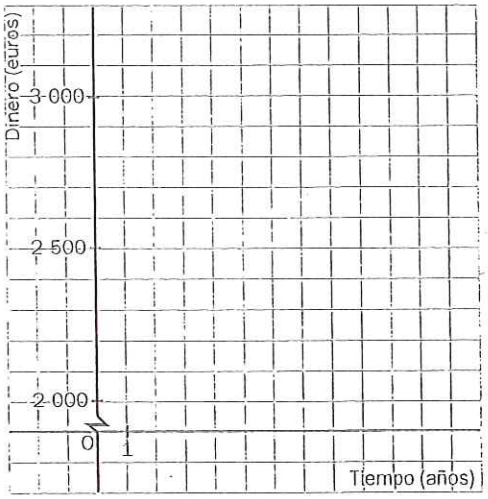


339 Se ingresan en un banco 2 000 euros a un interés simple del 5 % anual.

a) Escribe la fórmula que representa la relación entre el dinero que se tiene en el banco y los años transcurridos.

b) Representa la función.

x	$f(x)$



c) ¿Cuánto dinero se tiene al cabo de 5 años?

d) ¿Qué intereses se han obtenido después de 10 años?

e) ¿Cuántos años hacen falta para tener 2 400 euros?

f) ¿Por qué no tiene sentido representar los valores negativos tanto de la variable independiente como de la variable dependiente?

340 Dos talleres de coches tienen las siguientes tarifas:

1.º El primero cobra un fijo de 40 euros más 12 euros por hora trabajada.

2.º El segundo no cobra fijo, pero cobra a 20 euros por hora trabajada.

a) Escribe las fórmulas que relacionan el coste de una reparación dependiendo del número de horas trabajadas para cada taller.

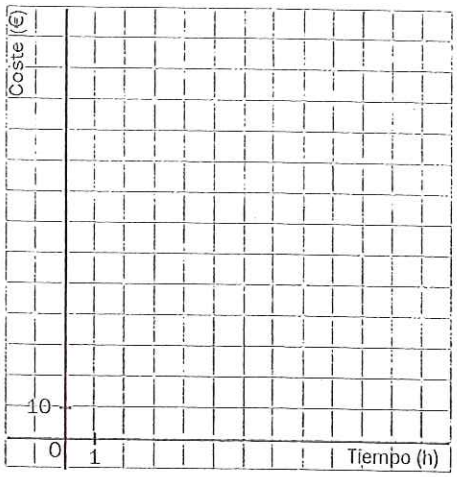
b) Representa en unos ejes ambas funciones.

1.

x	$f(x)$

2.

x	$g(x)$



c) ¿Cuánto tiene que durar la reparación para que el coste de ambos talleres sea el mismo?

d) ¿Cuándo es más barato escoger el primer taller?

e) ¿Cuándo es más barato escoger el segundo taller?

f) Si tuvieras que hacer una reparación en la que se tarda 4 horas, ¿a qué taller irías?

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

12. Funciones lineales

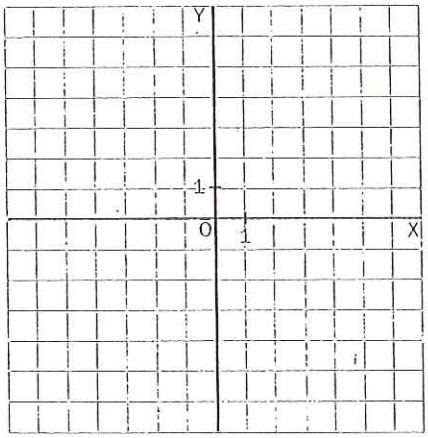
1 Indica en cada caso la pendiente y la ordenada en el origen de las funciones.

a) $f(x) = 5 - 3x$ b) $f(x) = 2x - 7$ c) $f(x) = 4x$

2 Representa las siguientes funciones.

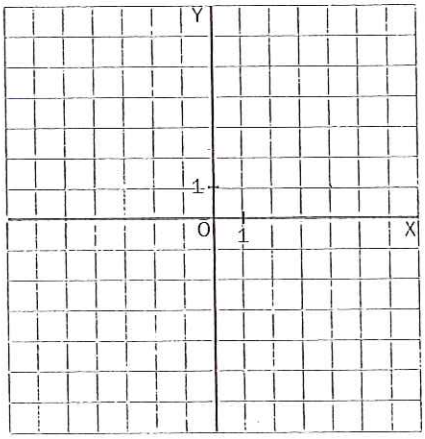
a) $f(x) = 3 - 2x$

x			
$f(x)$			



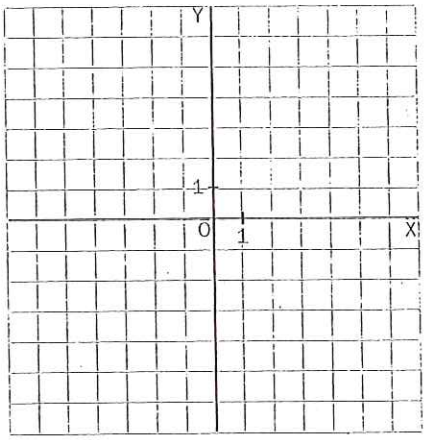
b) $f(x) = -5$

x			
$f(x)$			



c) $f(x) = x$

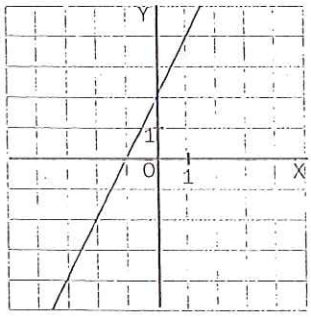
x			
$f(x)$			



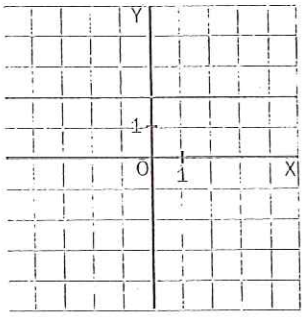
3 Relaciona mediante una flecha cada fórmula con su gráfica.

a) $f(x) = 2 - 2x$ b) $f(x) = 2x$ c) $f(x) = 2x + 2$ d) $f(x) = 2$

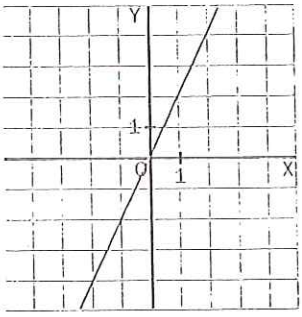
I.



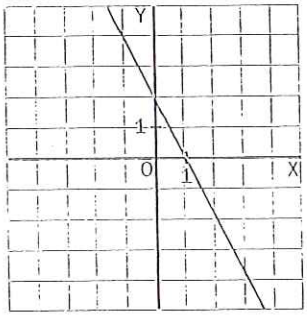
II.



III.



IV.



4 Un coche está a 1 200 kilómetros de su casa y viene hacia ella a una velocidad de 100 kilómetros por hora. Escribe la fórmula de la función que relaciona la distancia que le falta por recorrer con el número de horas.